

**Diplom–Vorprüfung**  
**Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen**  
**Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie**

**Aufgabe 1 (10 Punkte)**

a) Beweisen Sie etwa mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j} > \frac{1}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

b) Bestimmen Sie explizit die durch

$$(*) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

gegebene Funktion  $f$ . Geben Sie die  $x \in \mathbb{R}$  an, für die die Gleichheit (\*) besteht.

**Aufgabe 2 (10 Punkte)**

a) Für welche Werte von  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  ist die Funktion  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g(x) := \begin{cases} x_0 & \text{für } x = 0 \\ x^n \cos(x^{-n}) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

stetig? Für welche Werte von  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  ist  $g$  differenzierbar? Geben Sie gegebenenfalls  $g'(0)$  an.

b) Wir definieren die Funktionenfolge  $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$h_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ \cos(nx) & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{n} \\ -1 & \text{für } x > \frac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktionenfolge auf punktweise und auf gleichmäßige Konvergenz.

### Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - x) \cos(x)}{\sinh(x)}.$$

b) Für welche Werte von  $x \in \mathbb{R}$  und  $z \in \mathbb{C}$  konvergieren die Potenzreihen?

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 + (-1)^n)^n x^n$

(ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n.$

### Aufgabe 4 (10 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_0^1 \frac{x^3 + 3x^2 + x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx.$$

**Viel Erfolg!**

### Hinweise für nach der Klausur:

Die **Ergebnisse** der Vordiplomklausuren hängen ab Donnerstag, dem **20.03.08**, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/vd-f.html>

im Internet.

Die **Klausureinsicht** findet für **diejenigen**, die sich einer **mündlichen** Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, dem **15. April 08**, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt.

Die **Nachprüfungen** selbst sind in der Woche vom **21.04.08** bis **25.04.08**.

Die **allgemeine Klausureinsicht** findet am Mittwoch, **30.04.08**, von 15.45 bis 17.15 Uhr im Seminarraum S 34 statt.