1. Übungsklausur HMI 8/12/2007 Lösungen

Aufgabe 1

a.)

A	B	C	
w	w	w	f (4)
w	w	f	f (2) (oder (3))
w	f	w	f (4)
w	f	f	f (2)
f	w	w	f (4)
f	w	f	f (3)
f	f	w	
f	f	f	f (1)

lediglich A=B=f, C=w erfüllt die Bedingungen (1) bis (4), folglich spült Charlie alleine Geschirr.

oder:

(1) $A \vee B \vee C \ (\hat{=}\ w)$

(2) $A \rightarrow C$

(3) $B \rightarrow C$

(4) $C \rightarrow \neg(A \vee B)$

Ann: $A = w$, $(2) \rightarrow C = w$ $\quad (3) \xrightarrow{A=w} \neg(w \vee B) = \neg(w) = f$ ↯

Also $A = f$. Analog sieht man $B = f$.

$(1) \rightarrow A \vee B \vee C = f \vee f \vee C = C$, also $C = w$.

Fazit: Charlie spült alleine Geschirr

---

b.) 1) Wir zeigen: $a_n \geq 3$ (IV) für alle $n \in \mathbb{N}$:

IA $(n=1)$: $3 \geq 3$ ✓

IS $(n \rightsquigarrow n+1)$: $a_{n+1} = (a_n - 1)^2 \overset{IV}{\geq} (3-1)^2 = 4 \geq 3$ ✓

2.) Wir zeigen: $a_{n+1} \geq 2+n$ (IV) für alle $n \in \mathbb{N}$:

IA $(n=1)$: $3 \geq 2+1$ ✓

IS $(n \rightsquigarrow n+1)$: $a_{n+1} = (a_n - 1)^2 = a_n^2 - 2a_n + 1$

$= 1 + a_n \underbrace{(a_n - 2)}_{\geq 3-2=1} \geq 1 + a_n \overset{IV}{\geq} 1 + 2 + n = 2 + (n+1)$

(oder: $a_{n+1} = (a_n - 1)^2 \overset{IV}{\geq} (2+n-1)^2 = (n+1)^2$

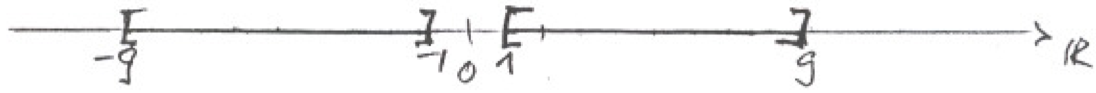
$= n^2 + 2n + 1 = \underbrace{n^2}_{\geq 1} + \underbrace{n}_{\geq 1} + n + 1 \geq 2 + (n+1)$.)

1. Übungsklausur HMI 8/12/2007 Lösungen

Aufgabe 2

a) $|5-|x|| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le 5-|x| \le 4 \Leftrightarrow 1 \le |x| \le 9$

$\Leftrightarrow$ $-9 \le x \le -1$ und $1 \le x \le 9$



b) Setze $y = 1-|x|$ und bestimme zunächst die $y \in \mathbb{R}$, die $|2-|y|| < 1$ erfüllen. Das geht z.B. wie in a):

$|2-|y|| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2-|y| < 1 \Leftrightarrow 1 < |y| < 3$

Gesucht sind jetzt die $x \in \mathbb{R}$, für die $1 < |1-|x|| < 3$ gilt:

Es gilt $|1-|x|| < 3 \Leftrightarrow -3 < 1-|x| < 3 \Leftrightarrow -2 < |x| < 4$

Das sind also die $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 4$ (*)

Schließlich gilt $1 < |1-|x||$ für die folgenden $x \in \mathbb{R}$:

Im Fall $|x| < 1$ sind das die x mit $1 < 1-|x| \Leftrightarrow |x| < 0$: kein $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ erfüllt $1 < |1-|x||$.

Im Fall $|x| \ge 1$ sind das die $x \in \mathbb{R}$, für die $1 < |x|-1$ oder $|x| > 2$ erfüllt ist.

Ergebnis (mit (*)):

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |2-|1-|x||| < 1\} = \{x \mid 2 < |x| < 4\}$$

gesucht $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

$r = |z| = \sqrt{5}\,|1+i| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{10}$

$\sqrt{5}(1+i)$ liegt auf der ersten Winkelhalbierenden $\rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

(Alternativ: Skizze, man sieht: $\varphi = \frac{\pi}{4}$, oder: Rechnen)

Damit: $z^{16} = r^{16} \cdot e^{16 i \varphi} = 10^{\frac{16}{2}} \cdot e^{4 i \pi} = 10^8 \cdot 1 = 10^8$ (= 100 000 0…

$\rightarrow \operatorname{Re} z = 10^8$, $\operatorname{Im} z = 0$.

- $\frac{1}{w} = \frac{1}{3+i} = \frac{3-i}{(3+i)(3-i)} = \frac{3-i}{9+1} = \frac{3-i}{10} \rightarrow \operatorname{Re} \frac{1}{w} = \frac{3}{10}$, $\operatorname{Im} \frac{1}{w} = -\frac{1}{10}$

---

b) $z^2 = \bar{z} \iff |z^2| = |\bar{z}| \wedge \arg z^2 = \arg \bar{z}$ (für $z \neq 0$)

$\iff (1)\ |z|^2 = |z| \wedge (2)\ 2 \arg z = -\arg z$ (für $z \neq 0$

(1) ist erfüllt für $|z| = 0$ und $|z| = 1$, $z = 0$ erfüllt $z^2 = \bar{z}$.

(2) $\iff 3 \arg z = 0 \pmod{2\pi} \iff \arg z \in \{0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\}$

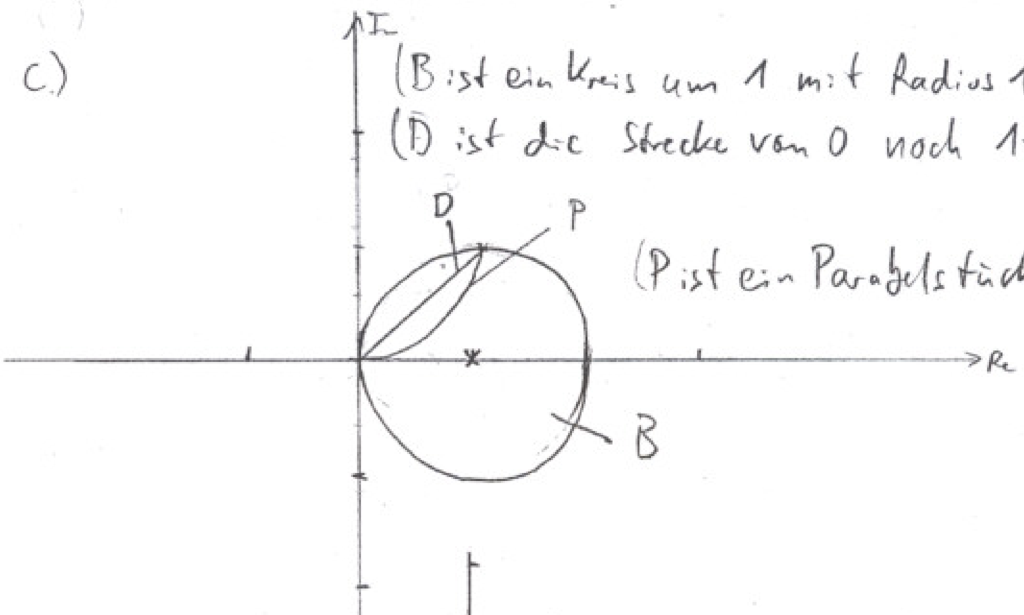
Alle Lösungen lauten: $z = 0$, $z = 1$, $z = e^{\frac{2}{3} i \pi}$, $z = e^{\frac{4}{3} i \pi}$

c.)

(B ist ein Kreis um 1 mit Radius 1)

(D ist die Strecke von 0 nach 1+i)

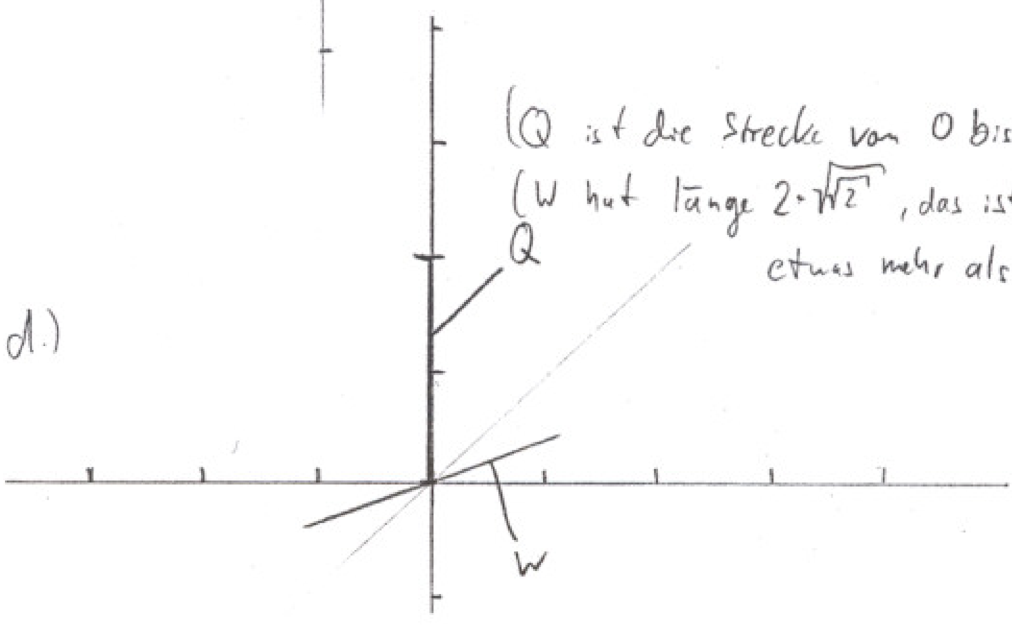
(P ist ein Parabelstück)



(Q ist die Strecke von 0 bis 2i)

(W hat Länge $2 \cdot \sqrt{2}$, das ist etwas mehr als 2)

d.)



1. Übungsklausur HM I 8/12/2007 Lösungen

Aufgabe 1

a) geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ mit $z=-\frac{1}{2}$; $|-\frac{1}{2}|<1$: Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

b) $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}} = \dfrac{n+\sqrt{n}-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} \qquad (*)$$

Wegen $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ $(n\to\infty)$ folgt aus $(*)$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1$$

c) Verwende $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (S. 24, Beispiele) und Kap 8 / Satz 5 / S. 24 aus der Vorlesung:

Wegen $1 \leq \sqrt{n-1} < n$ für $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ gilt

$$1 \leq \sqrt[n]{\sqrt{n-1}} < \sqrt[n]{n}$$

$$\to \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n-1}} = 1$$