2. Ü Klausur HMI WS 2007/08 2. Feb. 2008 Lösungen

Aufgabe 1)

a) $a_n = \frac{2^n}{n}$. $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2} = r$ Konvergenzradius

$\to$ Konvergent für $|x-4| < \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{7}{2} < x < \frac{9}{2}$. Divergent für $|x-4| > \frac{1}{2}$.

Randpunkte: $x = \frac{9}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{9}{2} - 4\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent

$x = \frac{7}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{7}{2} - 4\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergent

Die Reihe konvergiert genau für die x mit: $\frac{7}{2} \leq x < \frac{9}{2}$.

b) (geometrische Reihe) $\frac{6}{1+z} = \frac{3}{1 + \frac{z-1}{2}} = 3 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z-1}{2}\right)^k$

mit Konvergenz für z: $|z-1| < 2$, Divergenz für z mit $|z-1| \geq 2$, Konvergenzradius $r = 2$.

c) $x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4+(-1)^k)^{3k}} x^{5k}$. Mit $x^5 = u$ ist zunächst

$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(4+(-1)^k)^{3k}}}_{a_k} u^k$ zu untersuchen.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{(4+(-1)^k)^3} = \begin{cases} \frac{1}{5^3} & k \text{ gerade} \\ \frac{1}{3^3} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\to \limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{3^3} \to r$ (für die u-Reihe) $= 3^3 = 27$

D.h. die vorgelegte Reihe konvergiert für $|x^5| < 27$ und divergiert für $|x^5| > 27$. Der Konvergenzradius der gegebenen Reihe ist $\sqrt[5]{27}$.

2.) a) $f(x) = -\underbrace{x^5}_{\to \pm\infty} \underbrace{\left(1 + \underbrace{\frac{4}{x^3}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{5}{x^5}}_{\to 0}\right)}_{\to 1} \longrightarrow \mp\infty$ für $x \to \pm\infty$

Sei $y \in \mathbb{R}$. Zu zeigen: $\exists\, x \in \mathbb{R} : f(x) = y$.

$f(x) \to \mp\infty$ $(x \to \pm\infty)$, daher gibt es $x_0 < x_1 : f(x_0) > y > f(x_1)$

Da f stetig ist (klar, bzw. Polynom, bzw. Komposition stetiger Fkt'en),

gibt es nach dem ZWS ein $x \in (x_0, x_1) \subseteq \mathbb{R} : f(x) = y$.

b.) • Sei $x \in \mathbb{R}$. Für $n \geq x$: $f_n(x) = 0$, also $f_n(x) \to 0$ $(n \to 0)$

d.h. $f_n \to f$, $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. f ist stetig.

f_n konv. nicht glm gegen f, denn $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty \geq |f_n(n+1)| = 1 \not\to 0$.

• Für $x \in \mathbb{R}: |\sin x| = 1$, also genau für $x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$,

ist $g_n(x) = 1 \to 1$ $(n \to \infty)$

Sonst ist $g_n(x) = \underbrace{|\sin x|}_{\in [0,1)}{}^n \to 0$ $(n \to \infty)$

Die Grenzfunktion $g(x) = \begin{cases} 1 & x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist nicht stetig,

da alle Fkt'en g_n stetig sind, ist die Konvergenz nicht glm.

• ZZ: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos(kx)$ konv. für alle $x \in \mathbb{R}$: Sei $x \in \mathbb{R}$.

$\sqrt[k]{\frac{1}{2^k} |\cos kx|} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[k]{|\cos x|} \leq \frac{1}{2} \to \limsup \sqrt[k]{\ldots} \leq \frac{1}{2}$, also

konv. die Reihe nach dem $\sqrt{\ }$-Krit.

Alle h_n sind stetig. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos(kx)$ hat als Majorante $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$,

damit ist die Konvergenz gleichmäßig.

3) a.) $|\sin x| = |\sin(0) + \int_0^x \cos x \, dx| \leq \int_0^x |\cos x| dx \leq \int_0^x 1 dx = x$

oder $|\sin x| \overset{MWS}{\underset{\exists \xi}{=}} |(x-0) \cdot \cos \xi| \leq x \cdot 1 = x$ oder...

b.) Außer in 0 ist g stetig. Für $x>0$ müssen wir untersuchen, ob $g(x) \to 0$ $(x \to 0)$ gilt.

1. Fall $a>0 \to |x^a \sin^2(x^{-a})| = x^a |\sin^2(x^{-a})| \leq x^a \to 0 \quad (x \to 0)$

Damit gilt $g(x) \to 0 \quad (x \to 0)$, also ist g stetig.

2. Fall $a=0 \to |x^0 \sin^2(x^{-0})| = 1 \cdot \sin 1 \not\to 0 \quad (x \to 0)$

g ist nicht stetig für $a=0$

3. Fall $a<0 \to |x^a \sin^2(x^{-a})| \leq |x^a| \cdot \underbrace{|\sin(x^{-a})|}_{\leq x^{-a}} \cdot |\sin(x^{-a})|$

$\leq x^a \cdot x^{-a} \cdot |\sin x^{-a}| = \sin(\underbrace{x^{-a}}_{\to 0}) \to 0 \quad (x \to 0)$,

also ist g stetig für $a<0$.

c.) Gesucht: $x, y \in [0, 30]$ mit $x + y \leq 30$

und Gewinn(x,y) maximal, wobei

Gewinn$(x,y) = 17x - (5x + x^2) + 11y - 7y = 12x - x^2 + 4y$

Der Maximale Gewinn wird für $x+y=30$ erzielt, was man hieran sieht.

Also: $y = 30 - x$, wir müssen somit $f(x) =$ Gewinn$(x, 30-x)$ maximieren.

$f(x) = 12x - x^2 + 120 - 4x = -x^2 + 8x + 120$, $f \in C^1$.

Es kommen für das Maximum nur Randwerte $x \in [0, 30]$ oder

Werte in Frage mit $0 = f'(x) = -2x + 8$, also $x = 4$

$f(0) = 120$, $f(4) = 136$, $f(30) < 0$, also $x=4, y=26$ ist optimal.

2. Ü Klausur HMI WS 2007/08 2. Feb. 2008 Lösungen

Aufgabe 4)

a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \rightarrow f'(f(x)) = -\frac{1}{\left(1+\frac{1}{1+x}\right)^2} = -\frac{(1+x)^2}{(2+x)^2}$ $(*)$

$$f(f'(x)) = \frac{1}{1-\frac{1}{(1+x)^2}} = \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2-1} = \frac{(1+x)^2}{x(x+2)}$$

$$(f\circ f)'(x) = f'(f(x))\,f'(x) \underset{(*)}{=} \frac{1}{(2+x)^2} \qquad \text{(Kettenregel)}$$

b) $p'(x) = g'(x+g(x))\,(1+g'(x))$ (Kettenregel)

$h(x) = g((x-3)^2) \rightarrow h'(x) = 2(x-3)\,g'((x-3)^2)$ (Kettenregel)

c) $I = \int_0^x \sqrt{\sqrt{t}+1}\,dt$, Substitution $\tau = \sqrt{t}$, $t = \tau^2$

$t = x \rightarrow \tau = \sqrt{x}$, $t = 0 \rightarrow \tau = 0$, $dt = 2\tau\,d\tau$

$$\rightarrow I = 2\int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{\tau+1}\,\tau\,d\tau = \Big(\text{partiell mit } g'(\tau) = \sqrt{1+\tau},\ f(\tau) = \tau$$
$$\text{also } g(\tau) = \tfrac{2}{3}(1+\tau)^{3/2},\ f'(\tau) = 1\Big)$$

$$= 2\left\{ \frac{2}{3}\tau(1+\tau)^{3/2}\Big|_{\tau=0}^{\sqrt{x}} - \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2}{3}(1+\tau)^{3/2}\,d\tau \right\}$$

$$I = \frac{4}{3}\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^{3/2} - \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}(1+\tau)^{5/2}\Big|_{\tau=0}^{\sqrt{x}}$$

$$I = \frac{4}{3}\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^{3/2} - \frac{8}{15}(1+\sqrt{x})^{5/2} + \frac{8}{15}$$