Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. M. Muzzulini

SS 2008

1. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (Ü)

a) Beweisen Sie, dass für stetige Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\Big(\int_a^b f(t)g(t)\, dt \Big)^2 \le \Big(\int_a^b f^2(t)\, dt \Big) \Big(\int_a^b g^2(t)\, dt \Big).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass mit $\big\langle f, g \big\rangle := \int_a^b f(t)g(t)\, dt$ ein Skalarprodukt auf der Menge der stetigen Funktionen definiert wird.

b) Zeigen Sie allgemein, dass man für jede stetige Funktion $w : [a, b] \to (0, \infty)$ ein Skalarprodukt auf der Menge der stetigen Funktionen definieren kann durch

$$\big\langle f, g \big\rangle_w := \int_a^b f(t)g(t)w(t)\, dt.$$

c) Seien nun $a = 1$, $b = 2$ und $w(x) = \ln x$. Das Skalarprodukt aus Teil b) erzeugt die Norm $||f||_w := \big(\big\langle f, f \big\rangle_w \big)^{1/2}$.

(i) Berechnen Sie $||f||_w$ für $f(x) := \sqrt{x}$.

(ii) Finden Sie ein Polynom erster Ordnung also $p(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$, das bezüglich diesem Skalarprodukt senkrecht auf die konstante Funktion $k(x) = 1$ steht (also $\big\langle p, k \big\rangle_w = 0$).

Aufgabe 2 (Ü) Sei V die Menge aller stetigen Funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ für welche das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-t} f^2(t)\, dt$ konvergiert. Für $f, g \in V$ definieren wir

$$\big\langle f, g \big\rangle := \int_0^\infty e^{-t} f(t)g(t)\, dt.$$

a) Zeigen Sie, dass für $f, g \in V$, dieses Integral absolut konvergiert.

Tip: Betrachten Sie $\int_0^M e^{-t} f(t)g(t)\, dt$ und benutzen Sie Aufgabe 1.

b) Zeigen Sie, dass V ein reeller Vektorraum ist und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt in V.

c) Berechnen Sie $T_n := \big\langle f, g_n \big\rangle$ für $f(t) = e^{-t}$ und $g_n(t) = t^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Tip: Berechnen Sie zuerst T_0 und dann eine Rekursionsvorschrift ($T_{n+1} = \dots$).

Aufgabe 3 (T) Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$.
Das Vektor- oder Kreuzprodukt zweier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ (oder auch des $\mathbb{C}^3$) ist definiert als

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

Die Kombination von Kreuz und Skalarprodukt wird auch Spatprodukt genannt; das heißt das Spatprodukt von $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ ist gegeben durch $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$ (siehe Aufgabenteil **e)**).

a) Betrachten Sie zuerst die unten stehenden Terme und machen Sie sich klar, was diese verschiedenen Produkte (Kreuzprodukt, Skalarprodukt, Spatprodukt und Multiplikation mit einer Zahl) bedeuten, sowohl formal als auch geometrisch. Dazu können Sie etwa auch die Aussagen betrachten, die sie in dieser Aufgabe nachrechnen sollen.

Zeigen Sie durch einfache Rechnung die folgenden Aussagen:

b) $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) = 0$,

c) $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}$,
$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}$,

d) $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x}$ und $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{y}$,

e) $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{z} \times \vec{x}) \cdot \vec{y}$.
Wichitige Bemerkung dazu: Diese Zahl wird später als Determinante derjenigen 3×3-Matrix bezeichnet, deren Spalten aus den Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ und $\vec{z}$ bestehen.

Aufgabe 4 (T)

a) Seien $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Geben Sie eine ON-Basis von $\mathrm{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ an.

b) Seien $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Geben Sie eine ON-Basis von $\mathrm{Lin}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ an.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.