Aufgabe 3

a) Das Kreuzprodukt ist ein inneres Produkt in $\mathbb{R}^3$ (bzw. in $\mathbb{C}^3$). Das heißt es bildet zwei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ auf einen Vektor des $\mathbb{R}^3$ ab. Die Abbildungsvorschrift steht auf dem Aufgabenblatt. Wie man leicht sieht gilt $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$.
Zur Geometrie: Wie man im Teil **d)** nachrechnet, steht der resultierende Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ senkrecht auf $\vec{x}$ und auf $\vec{y}$. Die Länge des Vektors $\vec{x} \times \vec{y}$ gleicht der zweidimensionalen Fläche des Vierecks $0, \vec{x}, \vec{x}+\vec{y}, \vec{y}$.

Das Skalarprodukt bildet zwei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$ ab durch $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.
Zur Geometrie: Das Ergebnise ist gleich dem Produkt der Längen von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ mal dem Cosinus des Winkles $\angle(\vec{x}, \vec{y})$, d.h. etwa wenn $\vec{x}$ und $\vec{y}$ in die selbe Richtung zeigen ist der Cosiuns gleich 1, stehen sie senkrecht, so ist er 0, und ist ihr Winkel größer als $\pi/2$, dann ist er negativ.

Das Spatprodukt bildet drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$ ab. Wie man in Teil **d)** nachrechnet, ist es egal, ob man links oder rechts das Kreuzprodukt nimmt. Lediglich das vertauschen zweier vektoren verändert das Vorzeichen des Produktes, also gilt $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = -(\vec{y} \times \vec{x}) \cdot \vec{z}$ (siehe Kreuzprodukt). Zur Geometrie: Das Spatprodukt gibt das dreidimensionalen Volumens des Spats (oder Parallelepipeds), der von den Vektoren aufgespannt wird.

Die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl geht komponentenweise. Der Vektor wird um diesen Faktor gestreckt bzw. gestaucht.

b)

$$\begin{aligned}
&\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) \\
=&\vec{x} \times \begin{pmatrix} y_2z_3 - y_3z_2 \\ y_3z_1 - y_1z_3 \\ y_1z_2 - y_2z_1 \end{pmatrix} + \vec{y} \times \begin{pmatrix} z_2x_3 - z_3x_2 \\ z_3x_1 - z_1x_3 \\ z_1x_2 - z_2x_1 \end{pmatrix} + \vec{z} \times \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} x_2(y_1z_2 - y_2z_1) - x_3(y_3z_1 - y_1z_3) \\ x_3(y_2z_3 - y_3z_2) - x_1(y_1z_2 - y_2z_1) \\ x_1(y_3z_1 - y_1z_3) - x_2(y_2z_3 - y_3z_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2(z_1x_2 - z_2x_1) - y_3(z_3x_1 - z_1x_3) \\ y_3(z_2x_3 - z_3x_2) - y_1(z_1x_2 - z_2x_1) \\ y_1(z_3x_1 - z_1x_3) - y_2(z_2x_3 - z_3x_2) \end{pmatrix} \\
+&\begin{pmatrix} z_2(x_1y_2 - x_2y_1) - z_3(x_3y_1 - x_1y_3) \\ z_3(x_2y_3 - x_3y_2) - z_1(x_1y_2 - x_2y_1) \\ z_1(x_3y_1 - x_1y_3) - z_2(x_2y_3 - x_3y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
(\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z} &= (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)\vec{y} - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)\vec{z} \\
&= \begin{pmatrix} y_1(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) - z_1(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\ y_2(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) - z_2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\ y_3(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) - z_3(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_2(y_1z_2 - y_2z_1) - x_3(y_3z_1 - y_1z_3) \\ x_3(y_2z_3 - y_3z_2) - x_1(y_1z_2 - y_2z_1) \\ x_1(y_3z_1 - y_1z_3) - x_2(y_2z_3 - y_3z_2) \end{pmatrix} \\
&= \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})(\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z} - (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y}
\end{aligned}$$

Die zweite Rechnung geht analog.

d) Zu zeigen ist, dass $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \rangle = 0$:

$$\langle \vec{x}\times\vec{y}, \vec{x}\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} = x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Damit ist auch $\vec{y} \times \vec{x}$ senkrecht zu $\vec{y}$ und somit auch $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$.

e)

$$\begin{aligned}(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} &= \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2)z_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3 \\ &= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 + x_2y_1z_3 + x_3y_2z_1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_2z_3 - y_3z_2 \\ y_3z_1 - y_1z_3 \\ y_1z_2 - y_2z_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + x_2(y_3z_1 - y_1z_3) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1) \\ &= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 + x_2y_1z_3 + x_3y_2z_1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\vec{z} \times \vec{x}) \cdot \vec{y} &= \begin{pmatrix} z_2x_3 - z_3x_2 \\ z_3x_1 - z_1x_3 \\ z_1x_2 - z_2x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= (z_2x_3 - z_3x_2)z_1 + (z_3x_1 - z_1x_3)z_2 + (z_1x_2 - z_2x_1)z_3 \\ &= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 + x_2y_1z_3 + x_3y_2z_1.\end{aligned}$$

Aufgabe 4 Wir benützen das Verfahren nach Gram-Schmidt. Der erste Vektor u_1 ist ein Vielfaches (auf Norm 1 gestreckt bzw. gestaucht) des ersten gegebenen Vektors. Jeder weitere Vektor ist Orthogonal zu allen schon dagewesenen.
Wir berechnen im Folgenden erst Vektoren v_j, die in die richtige Richtung gehen. Nach Normierung erhalten wir die gesuchten Vektoren u_j der ONB.

a)

$$\vec{v}_1 := \vec{y}_1,\ \vec{u}_1 := \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{\vec{v}_1}{\sqrt{1+1+1+1}} = \frac{1}{2}\vec{y}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Den zweiten Vektor setzen wir $\vec{v}_2 := \vec{y}_2 - a\vec{u}_1$ mit $a = \langle \vec{y}_2, \vec{u}_1 \rangle = \frac{1}{2}(5 - 1 + 1 - 1) = 2$. Also

$$\vec{v}_2 := \vec{y}_1 - 2\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{u}_2 := \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{24}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den dritten Vektor setzen wir $\vec{v}_3 := \vec{y}_3 - b\vec{u}_1 - c\vec{u}_2$ mit $b = \left\langle \vec{y}_3, \vec{u}_1 \right\rangle = \frac{1}{2}(-3+3+1+3) = 2$ und $c = \left\langle \vec{y}_3, \vec{u}_2 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(-6-3+0-3) = -2\sqrt{6}$. Also

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Damit liegt $\vec{y}_3$ schon in $\mathrm{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$, weshalb $\mathrm{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3) = \mathrm{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$. Folglich ist $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ schon die gesuchte ONB.

b) Für die gegebenen Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ ergibt sich

$$\vec{v}_1 := \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_1 := \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und wegen

$$\langle \vec{x}_2, \vec{v}_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 2 \cdot \overline{1} + 2i \cdot \overline{0} + 0 \cdot \overline{1} = 2$$

erhalten wir

$$\vec{v}_2 := \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{v}_1 \rangle}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2 := \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(Beachte: Es gilt $\|\vec{v}_2\| = (|1|^2 + |2i|^2 + |-1|^2)^{1/2} = \sqrt{6}$.) Für die Berechnung von $\vec{v}_3$ brauchen wir die Skalarprodukte

$$\langle \vec{x}_3, \vec{v}_1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{0} + 1 \cdot \overline{1} = 6,$$

$$\langle \vec{x}_3, \vec{v}_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{2i} + 1 \cdot \overline{(-1)} = 5 - 6i^2 - 1 = 10.$$

Damit ergibt sich dann

$$\vec{v}_3 := \vec{x}_3 - \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v_3, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{u}_3 := \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1.) a) In Teil b) zeigen wir, daß $\langle f,g\rangle := \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, g(t) \cdot \overset{w(t)}{\overset{\shortparallel}{1}}\, dt$ ein SP definiert auf $C([a,b],\mathbb{R})$.

Damit gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\langle f,g\rangle \leq \|f\| \cdot \|g\|, \text{ also auch}$$

$$\left(\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right)^2 = \langle f,g\rangle^2 \leq \|f\|^2 \|g\|^2 = \langle f,f\rangle \langle g,g\rangle$$

$$= \int_a^b f^2\, dt \int_a^b g^2\, dt.$$

b.) z.z • $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$ (klar, da $f(t)\, g(t) = g(t)\, f(t)$)
(Kommutativität) ✓

• $\langle f_1+f_2, g\rangle = \langle f_1,g\rangle + \langle f_2,g\rangle$ (Additivität im 1 Argument)

$$\overset{\shortparallel}{\int} (f_1(t)+f_2(t))\, g(t)\, w(t)\, dt = \int f_1 g w\, dt + \int f_2 g w\, dt$$

$$= \langle f_1,g\rangle + \langle f_2,g\rangle \checkmark$$

• $\langle \lambda f,g\rangle = \lambda \langle f,g\rangle$ (klar, da $\int \lambda f(t) g(t) dt = \lambda \int f(t) g(t) dt$
(Homogenität im ersten Argument

• Definitheit: $\begin{cases} \langle f,f\rangle \geq 0 & \checkmark \text{ da } \int_a^b f^2(t)\, dt \geq 0 \\ \langle f,f\rangle = 0 \rightarrow f=0 \end{cases}$

$$0 = \langle f,f\rangle = \int_a^b f^2(t)\, w(t)\, dt \xrightarrow[\text{stetig}]{f,w} f^2(t)\cdot w(t) = 0$$
auf $[a,b]$

$$\xrightarrow{w(t)>0} f^2(t) = 0 \text{ auf } [a,b] \rightarrow f=0.$$

$\langle \cdot,\cdot \rangle$ ist SP: • Kommutativität $f \cdot g = g \cdot f$ ✓

• Additivität: $\int (f_1+f_2) g e^{-t} dt = \int f_1 g e^{-t} + \int f_2 g e^{-t}$ ✓

• Homogenität: $\int \lambda f g e^{-t} dt = \lambda \int f g e^{-t} dt$ ✓

• Definitheit: wie bei 1 a) ✓
(Integrand $f^2(t) e^{-t} \geq 0$, >0 irgendwo $\Rightarrow \int f^2 e^{-t} dt > 0$)

---

c.) $T_0 = \langle f, g_0 \rangle = \int_0^\infty e^{-2t} \cdot 1 \, dt = -\frac{1}{2}\left[e^{-2t}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$

$$\underline{T_{n+1}} = \langle f, g_{n+1} \rangle = \int_0^\infty \underbrace{e^{-2t}}_{v'} \cdot \underbrace{t^{n+1}}_{u} dt = \Big[\underbrace{-\tfrac{1}{2} e^{-2t}}_{v} \cdot \underbrace{t^{n+1}}_{u}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{-\tfrac{1}{2} e^{-2t}}_{v} \underbrace{(n+1) t^n}_{u'} dt$$

$$= 0 - 0 + \frac{n+1}{2} \int_0^\infty e^{-2t} t^n dt = \underline{\frac{n+1}{2} T_n}$$

Beh: $T_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$ (IV)

Bew per VI. IA $(n=0)$: $T_0 = \frac{1}{2} = \frac{0!}{2^{0+1}}$ ✓

IS $(n \rightsquigarrow n+1)$ $T_{n+1} = \frac{n+1}{2} T_n$

$$\overset{IV}{=} \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{2^{(n+1)+1}}$$ ✓

2a.) Zu zeigen: $\lim_{M\to\infty} \underbrace{\int_0^M |e^{-t} f(t) g(t)|\, dt}_{=: W(M)}$ existiert

$$W(M) = \int_0^M e^{-t} |f(t)|\, |g(t)|\, dt$$

$$\underset{\text{Aufgabe 1}}{\overset{\text{siehe}}{=}} \langle |f(t)|, |g(t)| \rangle_{C[0,M],w} \quad \text{mit } w(t) := e^{-t}$$

$$\leq \| |f| \|_{C[0,M],w} \cdot \| |g| \|_{C[0,M],w}$$

$$= \int_0^M f^2(t) e^{-t}\, dt \cdot \int_0^M g^2(t) e^{-t}\, dt$$

$$\leq \int_0^\infty f^2(t) e^{-t}\, dt \int_0^\infty g^2(t) e^{-t}\, dt =: K$$

Damit: $\left.\begin{array}{l} W(M) \leq K \text{ für alle } M \in [0,\infty), \\ W(M) \text{ wächst monoton} \end{array}\right\} \to W$ konv. für $M \to \infty$.

b.) Für $f, g \in V$ und $r \in \mathbb{R}$ ist zz: $rf, f+g \in V$:

$\int_0^\infty f(t) e^{-t}\, dt$ konv. $\to \int_0^\infty r f(t) e^{-t}\, dt$ konv.

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^\infty f^2(t) e^{-t}\, dt \text{ konv.} \\ \int_0^\infty g^2(t) e^{-t}\, dt \text{ konv} \\ \overset{a)}{\to} \int_0^\infty 2 f(t) g(t) e^{-t}\, dt \text{ konv.} \end{array}\right\} \to \int_0^\infty \underbrace{(f(t)+g(t))^2}_{= f^2+2fg+g^2} e^{-t}\, dt \text{ konv.}$$

Damit gilt $rf, f+g \in V$.

c)(i) $\|f\|_w = \langle f,f\rangle_w^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b f^2(t)\, w(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \left(\int_1^2 \underbrace{t}_{u'} \cdot \underbrace{\ln t}_{v}\, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left[\underbrace{\tfrac{1}{2}t^2}_{u}\underbrace{\ln t}_{v}\right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\tfrac{1}{2}t^2}_{u} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{t}}_{v'}\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(2\ln 2 - 0 - \int_1^2 \frac{t}{2}\, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2\ln 2 - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2\ln 2 - \frac{3}{4}}$$

(ii) $0 \stackrel{!}{=} \langle p, k\rangle_w \stackrel{a=1}{=} \int_1^2 (t+b)\cdot 1 \cdot \ln t\, dt$

$$\int_1^2 t \ln t\, dt + b\int_1^2 \ln t\, dt \underset{NR}{\overset{(i)}{=}} 2\ln 2 - \frac{3}{4} + b(2\ln 2 - 1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} NR: \int_1^2 \underbrace{\ln t}_{u}\, \underbrace{1}_{v'}\, dt &= \left[\underbrace{\ln t}_{u} \cdot \underbrace{t}_{v}\right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\tfrac{1}{t}}_{u'} \cdot \underbrace{t}_{v}\, dt \\ &= 2\ln 2 - 0 - \int_1^2 1\, dt = 2\ln 2 - 1 \end{aligned}}$$

$$\rightarrow b = \frac{2\ln 2 - \frac{3}{4}}{1 - 2\ln 2}$$