Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. M. Muzzulini SS 2008

2. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (Ü)

a) U, V und W seien $\mathbb{C}$-Vektorräume. Zeigen Sie dass für $f \in \mathcal{L}(U,V)$ und $g \in \mathcal{L}(V,W)$ die Abbildung $g \circ f$ eine lineare Abbildung von U nach W ist.

b) Sei U ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass U isomorph zu $\mathbb{C}^n$ ist.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$, $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ und $\vec{z} \in \mathbb{C}^3$. Wir definieren die folgenden linearen Abbildungen:

$$\begin{aligned}
P_{\vec{x}} &: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, & P_{\vec{x}}(\vec{y}) &:= (\vec{y} \cdot \vec{x})\vec{x},\\
K_{\vec{z}} &: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, & K_{\vec{z}}(\vec{y}) &:= \vec{z} \times \vec{y},\\
D &: \mathbb{C}^1((0,1)) \to \mathbb{C}((0,1)), & (Df)(x) &:= f'(x),\\
I &: \mathbb{C}([0,1]) \to \mathbb{C}([0,1]), & (If)(x) &:= \int_0^x f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Machen Sie sich kurz klar, dass es ich wirklich jedesmal um eine lineare Abbildung handelt. Berechenen Sie Bild und Kern jeder dieser Abbildungen.

Aufgabe 2 (T)

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Skalarprodunkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

a) Ist $x \in V$ und gilt $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in V$, so folgt $x = 0$.

b) Sind $x, y \in V$ linear unabhängig, und sind $x, z \in V$ linear unabhängig, so sind auch y, z linear unabhängig.

c) Es seien $x_1, \ldots, x_n, y \in V$. Ist $y \neq 0$ und ist y orthogonal zu jedem Vektor aus $L(x_1, \ldots, x_n)$, so folgt $L(x_1, \ldots, x_n) \neq V$.

d) Sind $x, y, z \in V$ linear abhängig, so existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $z = \alpha x + \beta y$.

e) Wenn die lineare Abbildung $f : V \to V$ nicht injektiv ist, so gibt es $x \in V$ mit $x \neq 0$ und $f(x) = 0$.

f) Ist $f : V \to V$ linear, so gilt dies auch für die Abbildung $g : V \to \mathbb{R}$, die durch $g(x) := \|f(x)\|$ definiert ist.

Aufgabe 3 (T)
Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

a) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ mit $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7y \\ ix + y \\ 3x - 4iy \end{pmatrix}$

b) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ mit $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7y + 2 \\ ix + y \end{pmatrix}$

c) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ mit $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = (x - i)(y + 4)$

d) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ mit $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = (x - 2i)(y + 3) - (x + 1)(y - 6i)$

Aufgabe 4 (T)
Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1 - i \\ 2 + i & 4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, welche der folgenden Ausdrücke definiert sind, und berechnen Sie diese:

$$A + B, \quad A + C, \quad 3C, \quad AB, \quad BA, \quad CB, \quad (A + B)C, \quad A^*C, \quad C^T B$$

Aufgabe 5 (Ü)
Wir betrachten nun den Raum der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[-1, 1]$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$. (Diese erzeugt die Norm $||f|| = (\langle f, f\rangle)^{1/2}$.)
Die Polynomfunktionen auf $[-1, 1]$ vom Grad kleiner gleich n bilden einen Untervektorraum U_n der Dimension $n+1$. Finden Sie eine ONB von U_0, ergänzen Sie diese zu einer ONB von U_1 und schließlich zu einer ONB von U_2. Die Elemente dieser Basis heißen Legendre-Polynome. Diese können nun verwendet werden, um eine gegebene stetige Funktion möglichst gut (bezüglich der gegebenen Norm) durch Polynome anzunähern. Im Gegensatz zur Annäherung durch ein Taylorpolynom, die in einer kleinen Umgebung des Entwicklungspunktes extrem gut ist, ist hier die Näherung auf dem ganzen Intervall gut (nicht unbedingt punktweise, aber im Integral).
Finden Sie nun, für $m = 0, 1, 2$, diejenige Polynomfunktion vom Grad kleiner gleich m, welche die Funktion $f(x) = |x|$ bezüglich der gegebenen Norm möglichst gut annähert.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.