Aufgabe 2 **a)** Die Aussage ist richtig: Da die Gleichung für alle $y \in V$ gilt, also insbesondere für $y = x$, haben wir $\langle x, x \rangle = 0$. Nach Definition des Skalarprodukts kann dies aber nur für $x = 0$ der Fall sein.

b) Die Aussage ist falsch: Wir betrachten den Vektorraum $V := \mathbb{C}^2$. Dort sind $\vec{x} := \vec{e}_1$ und $\vec{y} := \vec{e}_2$ linear unabhängig, und genauso $\vec{x}$ und $\vec{z} := \vec{e}_2$. Die Vektoren $\vec{y}$ und $\vec{z}$ sind jedoch nicht linear unabhängig, denn $\vec{y} - \vec{z} = \vec{0}$.

c) Die Aussage ist wahr: Wäre nämlich $L(x_1, \ldots, x_n) = V$, so hätten wir $\langle y, x \rangle = 0$ für alle $x \in V$. Aus **a)** folgte dann unmittelbar $y = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

d) Die Aussage ist falsch: Man betrachte $V := \mathbb{C}^1$ mit $x := 0$, $y := 0$ und $z := i$.

e) Die Aussage ist wahr: Ist f nicht injektiv, so gibt es $x_1, x_2 \in V$ mit $x_1 \neq x_2$ und $f(x_1) = f(x_2)$. Für $x := x_1 - x_2$ bedeutet dies aber $x \neq 0$, und wegen der Linearität von f ist $f(x) = f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = 0$.

f) Die Aussage ist falsch: Als Gegenbeispiel betrachten wir $V := \mathbb{C}^1$, die durch $f(x) := x$ gegebene lineare Abbildung und $y := 1$. Dann ist die Abbildung g nicht linear, denn es gilt $g(-y) = \|f(-1)\| = \|-1\| = 1 \neq -1 = -\|1\| = -\|f(y)\| = -g(y)$.

Aufgabe 3 **a)** Diese Abbildung ist linear, denn es gilt

$$f(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 \\ \lambda y_1 + y_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7(\lambda y_1 + y_2) \\ i(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) \\ 3(\lambda x_1 + x_2) - 4i(\lambda y_1 + y_2) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 7y_1 \\ ix_1 + y_1 \\ 3x_1 - 4iy_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7y_2 \\ ix_2 + y_2 \\ 3x_2 - 4iy_2 \end{pmatrix} = \lambda f(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) .$$

b) Diese Abbildung ist nicht linear, denn $f(\vec{0}) \neq \vec{0}$. Bei linearen Abbildungen muss jedoch stets $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot f(\vec{0}) = \vec{0}$ gelten.

c) Auch dieses f ist nicht linear, da wieder $f(\vec{0}) \neq 0$ gilt. Man beachte aber: Auch

$$g(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) := xy$$

wäre nicht linear (trotz $g(\vec{0}) = 0$), denn es gilt $g(\vec{e_1} + \vec{e}_2) = 1 \neq 0 + 0 = g(\vec{e}_1) + g(\vec{e}_2)$.

d) Entgegen dem ersten Anschein ist f linear, denn

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = (x - 2i)(y + 3) - (x + 1)(y - 6i)$$

$$= xy + 3x - 2iy - 6i - (xy - 6ix + y - 6i) = (3 + 6i)x - (1 + 2i)y .$$

Aufgabe 4 Die Summe $A + C$ ist nicht definiert, denn die Spaltenanzahl der beiden Summanden stimmt nicht überein. Auch das Produkt CB ist undefiniert, denn bei Matrizenprodukten muss die Anzahl der Spalten des ersten Faktors gleich der Anzahl der Zeilen des zweiten Faktors sein. Alle anderen Ausdrücke können wir berechnen:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2 \\ 1 & 0 & 3-i \\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix} \qquad 3C = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 3 & -3i \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3i & -3-5i & 6+6i \\ 1 & 2-3i & 2 \\ 6+i & -12-2i & 14+3i \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+3i & 12+2i & -11-i \\ 6+2i & 7+3i & -8+i \\ 0 & 3 & 3-3i \end{pmatrix}$$

$$(A+B)C = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2 \\ 1 & 0 & 3-i \\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+5i & 6 \\ 6-i & 6-2i \\ 2i & -6-7i \end{pmatrix}$$

$$A^*C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2-i \\ -3i & 1 & 4 \\ -1 & 1+i & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4-2i \\ 12 & 8-i \\ -5 & -5-i \end{pmatrix}$$

$$C^TB = \begin{pmatrix} i & 1 & 2 \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 6 & 2+3i \\ -i & 6+i & -2i \end{pmatrix}$$

1.) $u_0 = y_0 = 1$

$\|1\| = \left(\int_{-1}^{1} 1^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, also $v_0 = \frac{y_0}{\|y_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\rightarrow$ ONB von U_0 ist $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

$y_1(x) = x$ $\qquad v_1 = y_1 - \langle y_1, u_0\rangle u_0$

$= y_1 - \int_{-1}^{1} \underbrace{x \cdot 1}_{\text{ungerade Fkt}}\,dx \cdot u_0 = y_1 - 0 \cdot u_0 = y_1$

$\|v_1\| = \left(\int_{-1}^{1} x^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$u_1(x) = \frac{v_1(x)}{\|v_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x$

$\rightarrow$ ONB von U_1 ist $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right\}$

$y_2(x) = x^2$, $\qquad v_2 = y_2 - \langle y_2, u_0\rangle u_0 - \langle y_2, u_1\rangle u_1$

$= y_2 - \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{\sqrt{2}}\,dx \cdot u_0 - \int_{-1}^{1} \underbrace{\sqrt{\frac{3}{2}}\,x^3}_{\text{ungerade Fkt}}\,dx\; u_1$

$= y_2 - \frac{2}{3\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 \cdot u_1$, also $v_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$

$\|v_2\| = \left(\int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x\right]_{-1}^{1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(2 \cdot \frac{9-5}{45}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8}{45}}$ $\rightarrow u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$

$\rightarrow$ ONB v. U_2 ist $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\,x, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\right\}$

(Hinweis: Legendrepolynome heißen eigentlich die Polynome $1, x, x^2 - \frac{1}{3}, \ldots$, welche ein ONS bilden.

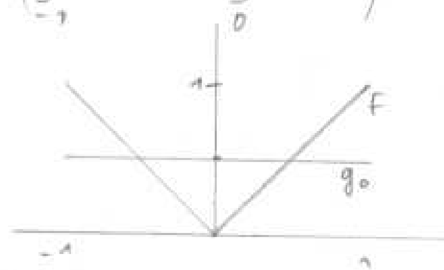
1.) Annäherung der Funktion f mit $f(x) = |x|$:
(Fortsetzung)

$$\sum_{n=0}^{m} \langle f, v_n \rangle v_n =: g_m$$ ist die Näherungsfkt..

$m=0$: $$\langle f, v_0 \rangle = \int_{-1}^{1} |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{-1}^{0} -x \, dx + \int_{0}^{1} x \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$ Skizze:



$m=1$: $$g_1 = g_0 + \langle f, v_1 \rangle v_1$$

$$\langle f, v_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{|x| \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, x}_{\text{ungerade Fkt.}} \, dx = 0.$$

$$\rightarrow g_1 = g_0$$

$m=2$: $$g_2 = g_1 + \langle f, v_2 \rangle v_2$$

$$\langle f, v_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{|x| \sqrt{\tfrac{45}{8}} \left(x^2 - \tfrac{1}{3}\right)}_{\text{gerade Fkt.}} dx$$

$$= \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{1} x^3 - \frac{1}{3} x \, dx$$

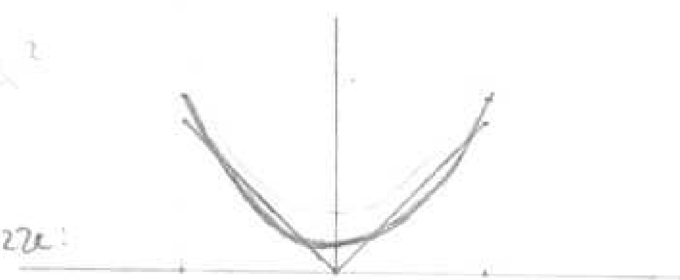
$$= 3 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{6} x^2 \right]_0^1 = 3 \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right)$$

$$= 3 \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3-2}{12} \right) = \frac{3}{12} \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\rightarrow g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{15}{16} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{5}{16} + \frac{15}{16} x^2$$ Skizze:



5) a) Seien $f \in \mathcal{L}(U,V)$, $g \in \mathcal{L}(V,W)$, $u_1, u_2 \in U$ und $z \in \mathbb{C}$.

Dann gilt:

$$g \circ f(u_1 + z u_2) = g(f(u_1 + z u_2)) \overset{f \text{ lin.}}{=\!=} g(f(u_1) + z f(u_2))$$

$$\overset{g \text{ lin}}{=\!=} g(f(u_1)) + z\, g(f(u_2)) = g \circ f\,(u_1) + z\; g \circ f(u_2) \quad ✓$$

b) Sei $\{u_1, \dots, u_n\}$ eine Basis von U.

Wir definieren $f: U \to \mathbb{C}^n$ durch

$$f(z_1 u_1 + z_2 u_2 + \dots + z_n u_n) := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

f ist linear ✓ f ist surj ✓ f ist wohldefiniert, da die Darstellung bzgl. einer Basis eindeutig ist. ✓

f ist injektiv, denn $f(v) = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = f(w)$

bedeutet $v = z_1 u_1 + \dots + z_n u_n = w$.

Insgesamt folgt: f ist ein Isomorphismus, damit ist U isomorph zu $\mathbb{C}^n$

c) aus der Vorlesung bekannt:

$\text{Bild } P_{\vec{x}} = \text{Lin}(\vec{x})$ ($\vec{y} \cdot \vec{x}$ kann jeden Wert annehmen, „$\subseteq$" ✓)

$$\text{Kern } P_{\vec{x}} = \{\vec{y} \in \mathbb{C}^n : (\vec{y} \cdot \vec{x})\vec{x} = 0\} = \begin{cases} \mathbb{C}^n & \text{Falls } \vec{x} = 0 \\ \{\vec{y} \in \mathbb{C}^n : \vec{y} \perp \vec{x}\} & \vec{x} \neq 0 \end{cases}$$

($n-1$ dim Untervektorraum)

$$\text{Bild } K_{\vec{z}} = \{\vec{z} \times \vec{y} : \vec{y} \in \mathbb{C}^3\} = \begin{cases} \{0\} & \text{falls } \vec{z} = 0 \\ \{\vec{x} \in \mathbb{C}^3 : \vec{x} \perp \vec{z}\} & \text{falls } \vec{z} \neq 0 \end{cases}$$

„$\subseteq$" ist klar: $\vec{x} \in \text{Bild}\, K_{\vec{z}} \to \vec{x} = \vec{z} \times \vec{y} \perp \vec{z}$

„$\supseteq$": $\text{Bild}\, K_{\vec{z}}$ hat Dimension 2 für $\vec{z} \neq 0$

Sei etwa $z_1 \neq 0 \to \left\{ z_1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z_1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist l.u.

$$\left(\begin{pmatrix} a \neq 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

5)
Fortsetzung

$$\operatorname{Kern} K_{\vec{z}} = \begin{cases} \mathbb{C}^3 & \text{falls } \vec{z} = 0 \\ \operatorname{Lin}(\vec{z}) & \text{sonst}, \end{cases}$$

(denn $\|\vec{z} \times \vec{y}\| = \|\vec{z}\| \, \|\vec{y}\| \cdot \sin \measuredangle(\vec{z}, \vec{y})$)

Bew: Bild hat dimension 2, also hat der Kern Dimension 1 und für $\vec{y} = \lambda \vec{z}$ gilt
$\vec{z} \times \vec{y} = \lambda (\vec{z} \times \vec{z}) = \lambda \cdot 0 = 0$.

Bild $D = C((0,1))$, denn für $f \in C((0,1))$ gibt es eine SF $F \in C^1((0,1)) \to DF = f \in \operatorname{Bild}(D)$.

Kern $D = \{F : \exists z \in \mathbb{C} \cdot F(x) = z \text{ für alle } x \in (0,1)\}$ ✓

Bild $I = \{f \in C^1([0,1]) : f(0) = 0\}$

Bew: „$\supseteq$" $f \in C^1([0,1])$ mit $f(0) = 0$
$\to f' \in C([0,1])$,

$$If'(x) = \int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0) = f(x)$$

$\to f = If' \in \operatorname{Bild} I$

„$\subseteq$" Sei $f \in C([0,1]) \to If \in C^1([0,1])$,
$If(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$. ✓