Aufgabe 1 **a)** Multipliziert man die linke Seite aus, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} c \\ a \\ b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f & g & e & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Damit muss gelten $a = b = e = g = 0$, $c = f = 2$ und $d = h = 9$.

Mit einer Multiplikation von links mit einer Matrix kann man Zeilen vertauschen, mit einer Multiplikation von rechts Spalten.

b) Multipliziert man die linke Seite aus, so erhält man die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a & c & 2a+b+d & b \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Einträge der zweiten Zeile des Produkts hängen nur von der gegebenen zweiten Zeile und der Matrix ab, mit welcher von rechts multipliziert wird. Stünde rechts in der zweiten Zeile irgend ein anderer Eintrag, so wäre das Problem nicht lösbar.
Für die Gleichheit der ersten Zeile muss gelten: $a = 1$, $c = 9$, $b = 4$ und $8 = 2a+b+d = 2+4+d$, also $d = 2$.

c) Seien $L = (l_{ij})$ und $R = (r_{ij})$, so gilt

$$LA = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & l_{11}+2l_{12} \\ 0 & l_{21}+2l_{22} \end{pmatrix} RA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$$

Dass $LA = 0$ gilt, können wir l_{12} und l_{22} beliebig wählen, etwa $l_{12} = s$ und $l_{22} = t$, damit muss nun gelten $l_{11} = -2s$ und $l_{21} = -2t$.
Dass $AR = 0$ gilt, muss genau gelten, dass $r_{12} = r_{22} = 0$ ist. r_{11} und r_{12} können beliebig gewählt werden.
Wir können die Menge aller gesuchter Matrizen L und R darstellen als

$$L = s\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = u\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

für beliebige $s, t, u, v \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 Es bezeichne A die in der Gleichung vorkommende Matrix. Wir können $AX = X + E_3$ umformen zu $AX - X = E_3$, also $(A - E_3)X = E_3$. Gesucht sind x_{jk} mit

$$\begin{pmatrix} -1 & 3-i & 1 \\ 0 & -1 & -2i \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnet man die erste Spalte des links stehenden Produkts und vergleicht sie mit der ersten Spalte der rechts stehenden Matrix, so erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_{11} + (3-i)x_{21} + x_{31} &= 1 \\ -x_{21} - 2ix_{31} &= 0 \\ -x_{31} &= 0 \end{aligned}$$

Wir gehen die Gleichungen von unten nach oben durch und lesen ab: $x_{31} = 0$, $x_{21} = 0$ und $x_{11} = -1$. Die Gleichungssysteme, die man durch Vergleich der zweiten bzw. dritten Spalte bekommt, lauten

$$\begin{aligned} -x_{12} + (3-i)x_{22} + x_{32} &= 0 \\ -x_{22} - 2ix_{32} &= 1 \\ -x_{32} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -x_{13} + (3-i)x_{23} + x_{33} &= 0 \\ -x_{23} - 2ix_{33} &= 0 \\ -x_{33} &= 1 \end{aligned}$$

Hier ergibt sich: $x_{32} = 0$, $x_{22} = -1$ und $x_{12} = (3-i)x_{22} = -3+i$. Und schließlich: $x_{33} = -1$, $x_{23} = -2ix_{33} = 2i$ und $x_{13} = (3-i)x_{23} + x_{33} = (3-i)2i - 1 = 1+6i$. Die gesuchte Matrix ist also

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -3+i & 1+6i \\ 0 & -1 & 2i \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 Wir bringen die erweiterte Matrix $(A, \vec{y}\,)$ auf Zeilennormalform.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha-1 & \beta+2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - \alpha Z_2]{Z_1 \to Z_1 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \beta-\alpha^2 & 2-\alpha \end{pmatrix} =: (*)$$

1. Fall: $\beta \neq \alpha^2$. Dann setzen wir zur Abkürzung $\gamma := (2-\alpha)/(\beta-\alpha^2)$ und erhalten

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \to (\beta-\alpha^2)^{-1} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - \alpha Z_3]{Z_1 \to Z_1 - (2+\alpha) Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2-(2+\alpha)\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 1-\alpha\gamma \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

Man sieht: In diesem Falle ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar; die Lösung ist gegeben durch $x_1 = 2-(2+\alpha)\gamma$, $x_2 = 1-\alpha\gamma$ und $x_3 = \gamma$.

2. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha \neq 2$. Dann ergibt sich

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \to (2-\alpha)^{-1} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+\alpha & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - Z_3]{Z_1 \to Z_1 - 2Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Rang der erweiterten Matrix ist also größer als der von A. Folglich besitzt das lineare Gleichungssystem in diesem Fall keine Lösung.

3. Fall: $\beta = \alpha^2$ und $\alpha = 2$. Dann steht die Zeilennormalform bereits da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang der erweiterten Matrix und der Rang von A stimmen überein, das Gleichungssystem ist also lösbar. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen des homogenen Gleichungssystem erhält man, indem man $x_3 = \lambda$ setzt:

$$\vec{x}_h = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist folglich

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Aufgabe 4 Die Matrix $B \in \mathbb{C}^{(m,m)}$ werden wir jeweils definieren, indem wir ihre Zeilen, die wir mit $\vec{x}_1^T, \ldots, \vec{x}_m^T$ bezeichnen, angeben.

Im folgenden brauchen wir ständig: Für jede Matrix $D \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ ist $\vec{e}_j^{\,T} D$ die j-te Zeile von D, wenn $\vec{e}_j$ der j-te Einheitsvektor von $\mathbb{C}^m$ ist.

Z1: Multiplizieren von Zeile j mit $\alpha \neq 0$. Es soll also gelten: $\vec{e}_j^{\,T} BA = \alpha(\vec{e}_j^{\,T} A)$ und $\vec{e}_k^{\,T} BA = \vec{e}_k^{\,T} A$ für $k \neq j$, d. h. $\vec{x}_j^T A = \alpha(\vec{e}_j^{\,T} A)$ und $\vec{x}_k^T A = \vec{e}_k^{\,T} A$ für $k \neq j$. Dies ist offenbar für $\vec{x}_j^T = \alpha \vec{e}_j^{\,T}$ und $\vec{x}_k^T = \vec{e}_k^{\,T}$ $(k \neq j)$ erfüllt.

Z2: Addieren des α-fachen von Zeile k zu Zeile j, wobei $k \neq j$. Hier soll $\vec{x}_j^T A = \vec{e}_j^{\,T} BA = \vec{e}_j^{\,T} A + \alpha(\vec{e}_k^{\,T} A)$ und $\vec{x}_s^T A = \vec{e}_s^{\,T} BA = \vec{e}_s^{\,T} A$ für $s \neq j$ gelten. Dies erreichen wir mit $\vec{x}_j^T = \vec{e}_j^{\,T} + \alpha \vec{e}_k^{\,T}$ und $\vec{x}_s^T = \vec{e}_s^{\,T}$ für $s \neq j$.

Z3: Vertauschen von Zeile j und k. Dabei soll $\vec{x}_j^T A = \vec{e}_j^{\,T} BA = \vec{e}_k^{\,T} A$ und $\vec{x}_k^T A = \vec{e}_k^{\,T} BA = \vec{e}_j^{\,T} A$ sowie $\vec{x}_s^T A = \vec{e}_s^{\,T} BA = \vec{e}_s^{\,T} A$ für $s \neq j, k$ gelten. Daher wählen wir $\vec{x}_j^T = \vec{e}_k^{\,T}$ und $\vec{x}_k^T = \vec{e}_j^{\,T}$ sowie $\vec{x}_s^T = \vec{e}_s^{\,T}$ für $s \neq j, k$.

Aufgabe 5 Mittels Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilennormalform; die Zeilen werden dabei jeweils mit Z_1, Z_2 und Z_3 bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{tauschen}]{\text{Zeilen}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2} Z_2]{Z_1 \to -\frac{1}{2} Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - 4Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 6Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to -\frac{1}{3} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + \frac{7}{2} Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In der Zeilennormalform gibt es drei nichtverschwindende Zeilen, also hat A Rang 3.

Nun zur Matrix B:

$$\begin{pmatrix}1 & -4 & 3 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4\\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta\end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_3 \to \frac{1}{2}Z_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2\\ 1 & -4 & 3 & -2 & 0\\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(j=2,3,4)]{Z_j \to Z_j - Z_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -4 & 2 & -4 & -2\\ 0 & 0 & -2 & \alpha-2 & \beta-2\end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2}Z_2]{Z_3 \to Z_3 - 2Z_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -8 & -2\\ 0 & 0 & -2 & \alpha-2 & \beta-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to \frac{1}{2}Z_3]{Z_4 \to Z_4 + Z_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4\end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \alpha-10 & \beta-4\end{pmatrix} =: \widetilde{B}$$

Fall 1: $\alpha = 10$ und $\beta = 4$. In diesem Falle steht die Zeilennormalform bereits da:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Da hier genau 3 nichtverschwindende Zeilen existieren, hat B in diesem Falle Rang 3.

Fall 2: $\alpha = 10$ und $\beta \neq 4$. Dann erhalten wir

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_1 \to (\beta-4)^{-1} Z_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 3Z_4} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

und lesen ab: In diesem Falle hat B Rang 4.

Fall 3: $\alpha \neq 10$. Dann setzen wir $\delta := (\beta - 4)/(\alpha - 10)$ und erhalten

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_4 \to (\alpha-10)^{-1} Z_4} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta\end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + 4Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 6Z_4,\ Z_2 \to Z_2 + Z_4} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 3-6\delta\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \delta\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1+4\delta\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \delta\end{pmatrix}$$

Die Matrix B besitzt somit auch in diesem Falle Rang 4.

Aufgabe 6 **a)** Um eine entsprechende Abbildungsmatrix zu erhalten müssen wir uns zuerst Basen des R^3 wählen. Wir wählen uns zuerst auf beiden Seiten die Standardbasis (e_1, e_2, e_3). Wir berechnen nun $P_{\vec{a}}(e_j)$ (die Bilder der Basisvektoren links) (für $j \in \{1, 2, 3\}$) und müssen diese als linearkombination von e_1, e_2 und e_3 (die Basisvektoren rechts) darstellen.

$$P_{\vec{a}}(e_j) = (e_j \cdot \vec{a})\vec{a} = a_j \vec{a} = (a_j a_1)e_1 + (a_j a_2)e_2 + (a_j a_3)e_3.$$

Damit ist die j-te Spalte von $[P_{\vec{a}}]$ gleich $\begin{pmatrix} a_j a_1 \\ a_j a_2 \\ a_j a_3 \end{pmatrix}$. Damit können wir zusammenfassen: $[P_{\vec{a}}] = (a_j a_k)_{j,k=1,2,3}$.

Wir können auch eine alternative Basis wählen. Dazu sei $\vec{a}$ unser erstes Basiselement. Seien nun $\vec{x}$ und $\vec{y}$ so, dass $(\vec{a}, \vec{x}, \vec{y})$ eine Orthonormalbasis ist. Diese Basis wählen wir nun erneut links und rechts. Damit gilt $P_{\vec{a}}\vec{a} = \vec{a} = 1\vec{a} + 0\vec{x} + 0\vec{y}$, $P_{\vec{a}}\vec{x} = P_{\vec{a}}\vec{y} = 0 = 0\vec{a} + 0\vec{x} + 0\vec{y}$. Bezüglich dieser Basis hat $[P_{\vec{a}}]$ links oben eine 1 und sonst nur Nullen als Einträge.

b) Wir wählen uns auf beiden Seiten die Standardbasis (e_1, e_2, e_3). Wir berechnen nun $K_{\vec{x}}(e_j)$ für $j \in \{1, 2, 3\}$ und müssen diese als Linearkombination von e_1, e_2 und e_3 darstellen. Es gilt
$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2,$
$e_1 \times e_3 = -e_2, \ e_2 \times e_1 = -e_3, \ e_3 \times e_2 = -e_1$ und $e_j \times e_j = 0$, und damit

$$\begin{array}{llcrlrlrl} K_{\vec{x}}(e_1) = & e_1 \times x = e_1 \times (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) & = & (0) & e_1 + & (-x_3) & e_2 + & (x_2) & e3, \\ K_{\vec{x}}(e_2) = & \ldots & = & (x_3) & e_1 + & (0) & e_2 + & (-x_1) & e3, \\ K_{\vec{x}}(e_3) = & \ldots & = & (-x_2) & e_1 + & (x_1) & e_2 + & (0) & e3. \end{array}$$

Damit erhalten wir $[K_{\vec{x}}] = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Möglicherweise hat man einmal die Lust am herumrechnen verloren. Die gegebene Aufgabe kann man auch einfach so lösen: Man wählt die Basen besonders geeignet. Nehmen wir rechts etwa die Basis $(e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3)$ und links die Basis $(2e_1 + 3e_2 + 5e_3, e_1, e_2 - e_3)$. (Es ist offensichtlich, dass es sich um Basen handelt, also die gegebenen Vektoren linear unabhängig sind.) Damit bildet T den j-ten Basisvektor der linken Basis auf den j-ten Basisvektor der rechten Basis ab, weshalb, bezüglich dieser Basen die Abbildungsmatrix die Einheitsmatrix ist. Beachte: T ist nicht die Idenditätsabbildung!