Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. M. Muzzulini SS 2008

4. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (T)
Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

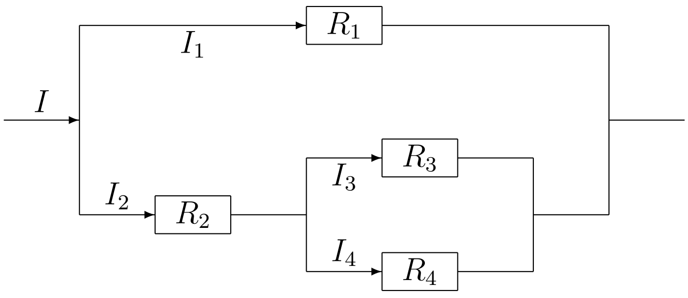
Aufgabe 2 (T)
Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie diejenigen $\lambda \in \mathbb{R}$ für welche die Determintante von $A - \lambda I$ gleich Null ist (mit I ist die Einheitsmatrix gemeint).

b) Machen Sie sich klar, dass für jedes solche $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Vektor $0 \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^4$ existiert, so dass gilt $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

Aufgabe 3 (T)
Gegeben ist die folgende Gleichstromschaltung:



Es gelte $I = 1$ und $R_1 = R_2 = R_3 = \alpha$ sowie $R_4 = \beta$.

a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für die Ströme I_1 bis I_4 auf.

b) Bestimmen Sie (für beliebige Konstanten α und β) alle Lösungen, und machen Sie sich klar, dass das Gleichungssystem für alle physikalisch sinnvollen Werte der Konstanten eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 4 (Ü)
Bestimmen Sie die Determinanten der reellen (n,n)-Matrizen $A = ((a_{ij}))$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$, mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ -j & \text{für} \quad i = j+1 \\ j-1 & \text{für} \quad i = j-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ür $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ist.

Aufgabe 5 (Ü)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$. Die Matrix $A_n(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei gegeben durch

$$A_n(t) := \begin{pmatrix} 1+t^2 & t & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ t & 1+t^2 & t & 0 & & & \vdots \\ 0 & t & 1+t^2 & t & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & 0 & t & 1+t^2 & t & 0 \\ \vdots & & & 0 & t & 1+t^2 & t \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & t & 1+t^2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det(A_n(t))$ in Abhängigkeit von n und t.

Hinweis: Setzen Sie $b_n := \det(A_n(t))$ und berechnen Sie b_0, b_1. Finden Sie eine Rekursionsformal für diese Folge, indem Sie nach der ersten Zeile entwickeln. Berechnen Sie damit weitere Folgenglieder, bis sie eine explizite Darstellung der Folge erraten. Beweisen Sie diese anschließend.

Aufgabe 6 (Ü)
Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $b, c \in \mathbb{R}, b \neq c$. Weiter sei die $(n,n)-$Matrix A_x gegeben durch

$$A_x = \begin{pmatrix} x & b-x & \cdots & \cdots & \cdots & b-x \\ c-x & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & b-x \\ c-x & \cdots & \cdots & \cdots & c-x & x \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie: $p(x) := \det A_x$ ist ein Polynom in x mit Grad höchstens 1.

b) Berechnen Sie die Koeffizienten dieses Polynoms durch Einsetzen geeigneter Werte für x.

c) Seien nun $n = 3$, $b = 1$ und $c = -1$. Wie viele Lösungen $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ hat die Gleichung $A_x\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von x?

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

Termine für die Übungsklausuren Herbst 2008 :
erste Übungsklausur HM II: Samstag, 24.5.2008, 09.00-11.00 Uhr
zweite Übungsklausur HM II: Samstag, 05.7.2008, 09.00-11.00 Uhr

Für die **Physiker** werden in der Woche vom 12.5. bis 16.5. Listen aushängen in denen Sie sich eintragen können, um sich für die erste Übungsklausur anzumelden.

Alle **E-Techniker** und **Geodäten** schreiben die erste Übungsklausur im **Gerthsen Hörsaal**. Eine Anmeldung hierfür ist **nicht** nötig.