Aufgabe 1 Wir wissen, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn wir das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte bzw. das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Auf diese Weise formen wir die Matrizen nun um und verwenden zudem den Entwicklungssatz. (Die verwendete Umformung steht jeweils in Klammern hinter dem Gleichheitszeichen.)

$$\det(A) =_{[S_1 \to S_1 + S_2]} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_4 \to Z_4 - Z_1]} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \to Z_2 - Z_1]} 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} 2 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2\big((-2) \cdot 2 - 2 \cdot 2\big) = 16$$

Bei der Matrix B gehen wir genauso vor:

$$\det(B) =_{[Z_1 \to Z_1 + Z_4]} \det \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =_{[S_j \to S_j - S_1]} \det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =_{[Z_1 \to Z_1 + Z_3]} 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 5 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -5(8+1) = -45$$

Und auch die Matrix C lässt sich so behandeln:

$$\det(C) =_{[Z_1 \to Z_1 - Z_4]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} =_{[S_4 \to S_4 - S_1]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix} =_{[S_3 \to S_3 - S_1]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix} = \alpha - 4 - 1 = \alpha - 5$$

Aufgabe 2 **a)** Solche Zahlen λ heißen Eigenwerte.

Bestimmung der Eigenwerte: Im folgenden werden die Spalten mit Sn bezeichnet:

$$p = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -\lambda & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{zu } S1\text{: } +S2+S3-S4}{=} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 1 & -1 \\ 6-\lambda & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 6-\lambda & 4 & -\lambda & 1 \\ \lambda-6 & -2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{zu } S3:\ -S1\text{,Entwickeln nach } S3}{=} -(6-\lambda)(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{zu } S2:\ -2S1\text{,Entwickeln nach } S2}{=} -(6-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(1-\lambda)(6-\lambda)$$

Die Eigenwerte sind -1, 1 und 6, denn genau dies sind die Nullstellen dieses Ploynoms (dieses heißt übrigens das Charakteristische Polynom von A).

b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $\det(A - \lambda I) = 0$. Damit hat die Matrix $\det(A - \lambda I) = 0$ nicht vollen Rang 4. Das bedeutet, dass es einen Vektor $0 \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^4$ geben muss, so dass $(A - \lambda I)\vec{x} = 0$. Für diesen Vektor gilt also $A\vec{x} - \lambda I\vec{x} = 0$, und damit $A\vec{x} = \lambda I\vec{x}$.

Aufgabe 3 **a)** Wir verwenden die Kirchhoffschen Gesetze, um das Gleichungssystem aufzustellen: Die Knotenregel liefert die Gleichungen

$$I = I_1 + I_2 \qquad \text{und} \qquad I_2 = I_3 + I_4\,.$$

Die Maschenregel liefert zwei weitere Gleichungen, nämlich

$$R_3 I_3 = R_4 I_4 \qquad \text{und} \qquad R_1 I_1 = R_2 I_2 + R_3 I_3\,.$$

(Die Maschenregel liefert auch noch $R_1 I_1 = R_2 I_2 + R_4 I_4$, aber diese Information ist in den beiden anderen Gleichungen bereits enthalten.) Insgesamt ergibt sich mit den gegebenen Werten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= 1 \\ I_2 - I_3 - I_4 &= 0 \\ \alpha I_3 - \beta I_4 &= 0 \\ \alpha I_1 - \alpha I_2 - \alpha I_3 &= 0 \end{aligned}$$

b) Wir betrachten nun die zugehörige erweiterte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ \alpha & -\alpha & -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - \alpha Z_1]{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & -2\alpha & -\alpha & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 2\alpha Z_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -3\alpha & -2\alpha & -\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 3Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha - 3\beta & -\alpha \end{pmatrix} =: B$$

Fall 1: Für $\delta := 2\alpha + 3\beta \neq 0$ erhalten wir

$$\xrightarrow{Z_4 \to -Z_4/\delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_2 \to Z_2 + Z_4 \\ Z_3 \to Z_3 + \beta Z_4}]{Z_1 \to Z_1 - Z_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 - \alpha/\delta \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \alpha/\delta \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \alpha\beta/\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{pmatrix} =: B_1$$

Fall 1.1: Ist zusätzlich $\alpha \neq 0$ so geht es weiter wie folgt:

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3/\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1-\alpha/\delta \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \alpha/\delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \beta/\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2+Z_3]{Z_1 \to Z_1 - Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1-(\alpha+\beta)/\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (\alpha+\beta)/\delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \beta/\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem ist folglich eindeutig lösbar; man hat

$$I_1 = 1 - \frac{\alpha+\beta}{\delta} = \frac{\alpha+2\beta}{2\alpha+3\beta}, \quad I_2 = \frac{\alpha+\beta}{2\alpha+3\beta}, \quad I_3 = \frac{\beta}{2\alpha+3\beta}, \quad I_4 = \frac{\alpha}{2\alpha+3\beta}.$$

Fall 1.2: Ist dagegen $\alpha = 0$, so haben wir

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sämtliche Lösungen dieses inhomogenen Systems erhalten wir, indem wir $I_3 = \lambda$ wählen. Dann ergibt sich $I_1 = 1-\lambda$, $I_2 = \lambda$ und $I_4 = 0$. Die allgemeine Lösung lautet folglich

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Fall 2: Gilt $2\alpha + 3\beta = 0$, also $\beta = -\frac{2}{3}\alpha$, so ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \frac{2}{3}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Fall 2.1: Für $\alpha \neq 0$ folgt wegen der letzten Zeile: Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.

Fall 2.2: Ist dagegen $\alpha = 0$, so haben wir

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir können $I_3 = \lambda$ und $I_4 = \mu$ beliebig wählen; dann folgt $I_1 = 1-\lambda-\mu$ und $I_2 = \lambda+\mu$. Die allgemeine Lösung ist daher

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}).$$

Aus physikalischer Sicht sind nur Werte $\alpha, \beta > 0$ sinnvoll. Dann haben wir stets Fall 1.1 und damit eindeutige Lösbarkeit.

Aufgabe 6

a) Im Folgenden Sei mit Z_n die n-te Zeile gemeint.

$$\det A_x = \begin{vmatrix} -x & b-x & \cdots & b-x \\ c-x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b-x \\ c-x & \cdots & c-x & -x \end{vmatrix} \overset{Z2-Z1,Z3-Z1,\dots,Zn-Z1}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -x & b-x & \cdots & \cdots & b-x \\ c & -b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & c-b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ c & c-b & \dots & c-b & -b \end{vmatrix} \overset{\text{Entwickeln nach}Z1}{=}$$

$$= (-x) \begin{vmatrix} -b & & & \\ c-b & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ c-b & \cdots & c-b & -b \end{vmatrix} - (b-x) \left|\cdots\right| \pm \cdots \pm (b-x) \left|\cdots\right|$$

$$=: a_0 + a_1 x,$$

ein Polynom in x mit Grad ≤ 1.

b) Mit $x = b$ ergibt sich $\det A_b = \begin{vmatrix} -b & & & \\ c-b & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ c-b & \cdots & c-b & -b \end{vmatrix} = (-b)^n.$

Analog folgt $\det A_c = (-c)^n$.

Aus $p(x) = a_0 + a_1 x$ folgt $\begin{cases} a_0 + a_1 b = (-b)^n \\ a_0 + a_1 c = (-c)^n \end{cases}$.

$$\Rightarrow a_0 = \frac{c(-b)^n - b(-c)^n}{c-b} = (-1)^n \frac{cb^n - bc^n}{c-b},$$

$$a_1 = \frac{(-b)^n - (-c)^n}{b-c} = (-1)^n \frac{b^n - c^n}{b-c}$$

c) In diesem Fall ist $a_0 = 0$ und $a_1 = -1$, also $p(x) = -x$.
Für $x \neq 0$ ist die Determinante von A_x ungleich Null und damit die Matrix A_x regulär. Somit gibt es genau eine Lösung $\vec{y}$ jeder Gleichung $A_x\vec{y} = \vec{z}$.
Für $x = 0$ ist die Determinanate von A_x gleich Null. Damit ist die Abbildung $\vec{y} \mapsto A_x\vec{y}$ weder surjektiv noch injektiv. Da sie nicht surjektiv ist, gibt es $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ für welche es keine Lösung von $A_x\vec{y} = \vec{z}$ gibt. Für jedes $\vec{z}$ im Bild dieser Abbildung ist die Lösung nicht eindeutig. Die gegebene Rechte Seite ist gleich der ersten Spalte von A_x, also gibt es etwa $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, mit $A_x\vec{y} = \vec{z}$. Jedoch gibt es unendlich viele weitere solcher Lösungen.

4) $A_n = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ -j & i=j+1 \\ j-1 & i=j-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\det A_1 = \det(1) = 1$, $\det A_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, $\det A_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 6$

Mit Hilfe des Gauß-Alg. läßt sich A_n zu einer oberen Δ-Matrix mit gleicher Determinante vereinfachen:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & 0 & -(n-1) & 1 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} =: C_n$$

Hierbei wird im k-ten Schritt jeweils die k-te Zeile durch die Summe der (k-1)-ten und k-ten Zeile ersetzt $(k=1,\dots,n)$.

Es ergibt sich

$$\det A_n = \det C_n = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n = n!$$

5.) $b_1 = \det A_1(t) = \det(1+t^2) = \underline{1+t^2}$, $b_2 = \det(A_2(t)) = \det\begin{pmatrix} 1+t^2 & t \\ t & 1+t^2 \end{pmatrix} = (1+t^2)^2 - t^2 = \underline{1+t^2+t^4}$.

Entwickln wir nach der esten Zeile, so erhalten wir für $\underline{n \geq 3}$:

$$b_n = \det A_n = (1+t^2)\det A_{n-1} - t \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} t & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+t^2 & t & & \vdots \\ \vdots & t & \ddots & & 0 \\ & 0 & & \ddots & t \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & t & 1+t^2 \end{pmatrix}}_{n-1}$$

$$\overset{\text{Entw. nach}}{\underset{\text{1. Spalte}}{=}} (1+t^2)\det A_{n-1} - t^2 \det A_{n-2} = (1+t^2)\, b_{n-1} - t^2\, b_n .$$

Damit erhalten wir $b_3 = (1+t^2)b_2 - t^2 b_1 = (1+t^2)(1+t^2+t^4) - t^2(1+t^2) = \underline{1+t^2+t^4+t^6}$

Vermutung: $b_n = \sum_{k=0}^{n} t^{2k}$ (IV)

Bew mit VI: IA $b_1 = 1+t^2 = \sum_{k=0}^{1} t^{2k}$ ✓, $b_2 = 1+t^2+t^4 = \sum_{k=0}^{2} t^{2k}$ ✓

IS ($n-1 \leadsto n$, $n\geq 3$): $b_n = \det A_n(t) = (1+t^2)\sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} - t^2 \sum_{k=0}^{n-2} t^{2k}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} t^{2k+2} - \sum_{k=0}^{n-2} t^{2k+2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} t^{2k} \quad \square$$

Also gilt $\det A_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^{2k}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.