Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. M. Muzzulini

SS 2008

5. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (T)
Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Welche der folgenden Aussagen gelten?

- Die Determinante ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^{n\times n}$ nach $\mathbb{C}$?
- $\det I_n = n$?
- $\det(AB) = \det A \det B$?
- $\det(A^{-1}) = \det A$?
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\det(C^{-1}C^\top C^2 C^\top C^{-1}) = (\det C)^2$?
- $\det(A + B) = \det A + \det B$?
- $\det\big((\det A)B\big) = (\det A)^n \det B$?

Aufgabe 2 (T)
Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen regulär sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (T)
Es sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{a}\| = 1$ gegeben. Für jedes $\phi > 0$ wird durch

$$f_\phi(\vec{x}\,) := (\cos\phi)\vec{x} + (\sin\phi)(\vec{a} \times \vec{x}\,) + (1 - \cos\phi)(\vec{x} \cdot \vec{a}\,)\vec{a}$$

eine Abbildung $f_\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert.

a) Zeigen Sie, dass f_ϕ eine lineare Abbildung ist, und geben Sie die Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis an.

b) Bestimmen Sie $f_\phi(\vec{a}\,)$ und $f_\phi(\vec{c}\,)$ für einen beliebigen Vektor $\vec{c}$, der auf $\vec{a}$ senkrecht steht. Deuten Sie die Abbildung geometrisch.

c) Rechnen Sie nach, dass $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ für $\alpha, \beta > 0$ gilt.

Aufgabe 4 (T)
Ergänzen Sie jeweils einen Vektor, so dass die Vektoren die Spalten einer unitären Matrix bilden. Ist der zu ergänzende Vektor eindeutig bestimmt?

a) $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 (Ü)
Stellen Sie die Permutation π jeweils als Produkt von Transpositionen dar. Ist π gerade oder ungerade? Bestimmen Sie die Fehlstandszahl $f(\pi)$.

a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 2 & 1 & 8 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6 (Ü)
Zeigen Sie: Hat die Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ den Rang r, und sind $U, V \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ reguläre Matrizen, so hat auch die Matrix UAV den Rang r.

Aufgabe 7 (Ü)
Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ sei orthogonal. Zeigen Sie, dass es dann gewisse Zahlen $c, s \in \mathbb{R}$ mit $c^2 + s^2 = 1$ gibt, so dass gilt:

$$A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad A = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 (Ü)
Wir suchen eine Lösung der Gleichung $\dot{x} = -x + y, \quad \dot{y} = -6x + 4y$.
Diese Gleichung kann man äquivalent umschreiben zu

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

für ein $A \in \mathbb{R}^{2,2}$. Wäre nun A eine Diagonalmatrix (das heißt $a_{12} = a_{21} = 0$), so wären dies zwei entkoppelte Probleme der Art $\dot{z} = az$, welche leicht zu lösen wären. Um auf eine solche Gestalt zu kommen führen wir neue Variablen u und v ein mit $\binom{u}{v} = C^{-1}\binom{x}{y}$ für eine noch zu ermittelnde Matrix C, also $C\binom{u}{v} = \binom{x}{y}$. Setzen Sie dies in Gleichung (1) ein. Durch eine einfache Umformung erhalten Sie damit eine äquivalente Gleichung der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Wie sieht Matrix D aus (in Abhängigkeit von C)? Finden Sie eine geeignete Matrix C, so dass D eine Diagonalmatrix ist (siehe Vorlesung!). Lösen Sie für dieses C die Gleichung (2) und finden Sie damit die Lösungen von Gleichung (1).

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.