Aufgabe 1

- Die Determinante ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^{n\times n}$ nach $\mathbb{C}$?
  Nein (außer für $n = 1$). Es gilt $\det(\lambda A) = (\lambda)^n \det(A)$.

- $\det I_n = n$?
  Nein (außer für $n = 1$). Es gilt $\det I_n = 1$.

- $\det(AB) = \det A \det B$?
  Ja.

- $\det(A^{-1}) = \det A$?
  Nein (außer für $\det A = 1$). Wie man oben sieht gilt $\det(A^{-1}) \det A = \det(A^{-1}A) = \det I_n = 1$, und damit $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\det(C^{-1}C^\top C^2 C^\top C^{-1}) = (\det C)^2$?
  Ja. Sogar jede reguläre Matrix erfüllt dies (nachrechnen!).

- $\det(A + B) = \det A + \det B$?
  Nein (außer für $n = 1$ oder besonders ausgewählte Matrizen A und B, etwa $A = 0$). Zum Beispiel ist $\det(I_2 + I_2) = \det(2I_2) = 4 \det I_2 = 4 \neq 2 = \det I_2 + \det I_2$.

- $\det\big((\det A)B\big) = (\det A)^n \det B$?
  Ja. $\det A$ ist ja nur eine Zahl. Nun siehe erster Punkt.

Aufgabe 2 Wir bringen jeweils die um die Einheitsmatrix erweiterte Matrix mittels Zeilenumformungen auf Zeilennormalform; daran sieht man dann, ob die Matrix regulär ist und kann gegebenenfalls auch die Inverse ablesen. Zunächst zur Matrix A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_2]{\substack{Z_1 \to Z_1 - 2Z_2 \\ Z_3 \to Z_3 - 2Z_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - \frac{3}{2}Z_2]{Z_1 \to Z_1 + Z_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + \frac{2}{3}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to \frac{2}{3}Z_3]{Z_2 \to -\frac{1}{2}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist folglich regulär, und es gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix B ergibt sich

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 4Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Man sieht: Die Matrix B ist nicht regulär. Jetzt noch zu C:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 + 2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda + 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to 5Z_3 - 3Z_2]{Z_1 \to -5Z_1 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5\lambda - 10 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

Nun kommt es auf λ an: Für $\lambda = 2$ ist die Matrix C nicht regulär; für $\lambda \neq 2$ ergibt sich

$$\xrightarrow[Z_3 \to Z_3/(\lambda-2)]{Z_2 \to Z_2 - 2Z_3/(\lambda-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 - 8/(\lambda-2) & 1 + 6/(\lambda-2) & -10/(\lambda-2) \\ 0 & 0 & 5 & 4/(\lambda-2) & -3/(\lambda-2) & 5/(\lambda-2) \end{array}\right)$$

Die inverse Matrix ist somit

$$C^{-1} = \frac{1}{5(\lambda-2)} \begin{pmatrix} -3\lambda + 6 & \lambda - 2 & 0 \\ 2\lambda - 12 & \lambda + 4 & -10 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 **a)** Für $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ gilt

$$\vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}\,,$$

wenn a_1, a_2, a_3 die Komponenten von $\vec{a}$ sind, sowie

$$(\vec{x} \cdot \vec{a}\,)\vec{a} = \begin{pmatrix} (x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3)a_1 \\ (x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3)a_2 \\ (x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3)a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} \vec{x}\,.$$

Folglich ergibt sich

$$f(\vec{x}\,) = \left((\cos\phi)E_3 + (\sin\phi) \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} + (1 - \cos\phi) \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} \right) \vec{x}\,.$$

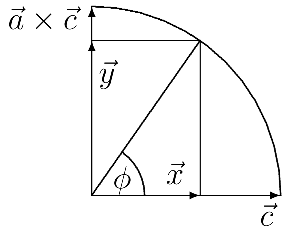
Es gilt also $f(\vec{x}\,) = A\vec{x}$ mit einer gewissen Matrix A. Diese Matrix ist die gesuchte Darstellungsmatrix, und die Linearität von f ist damit auch gezeigt.

b) Wegen $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ und $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 = 1$ gilt

$$f_\phi(\vec{a}\,) = (\cos\phi)\vec{a} + (\sin\phi)(\vec{a} \times \vec{a}\,) + (1-\cos\phi)(\vec{a} \cdot \vec{a}\,)\vec{a} = (\cos\phi)\vec{a} + (1-\cos\phi)\vec{a} = \vec{a}\,.$$

Für einen Vektor $\vec{c}$, der orthogonal zu $\vec{a}$ ist, gilt $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$; also ergibt sich

$$f_\phi(\vec{c}\,) = (\cos\phi)\vec{c} + (\sin\phi)(\vec{a} \times \vec{c}\,)\,.$$



Um zu verstehen, was mit $\vec{c}$ passiert, betrachten wir die nebenstehende Skizze. Dabei ist zu beachten: Der Vektor $\vec{a}$ ist nicht eingezeichnet; er zeigt senkrecht aus der Zeichenebene heraus. Weiter gilt: Da $\vec{a}$ und $\vec{c}$ senkrecht zueinander sind, der Winkel zwischen ihnen also $= \frac{\pi}{2}$ ist, gilt $\|\vec{a} \times \vec{c}\,\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{c}\,\| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \|\vec{c}\,\|$. Für die eingezeichneten Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ gilt $\vec{x} = (\cos\phi)\vec{c}$ und $\vec{y} = (\sin\phi)(\vec{a} \times \vec{c}\,)$. Somit ist $f_\phi(\vec{c}\,) = \vec{x} + \vec{y}$ der Vektor, den man erhält, wenn man $\vec{c}$ um den Winkel ϕ dreht, und zwar um die durch $\vec{a}$ gegebene Drehachse.

Einen beliebigen Vektor $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ können wir stets schreiben als $\vec{z} = \lambda\vec{a} + \vec{c}$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$ und einem zu $\vec{a}$ orthogonalen Vektor $\vec{c}$. Dann ist $f_\phi(\vec{x}\,) = \lambda f_\phi(\vec{a}\,) + f_\phi(\vec{c}\,) = \lambda\vec{a} + f_\phi(\vec{c}\,)$. Die Abbildung f_ϕ stellt mithin eine Drehung um den Winkel ϕ um die Drehachse $\{\, \lambda\vec{a} : \lambda \in \mathbb{R}\,\}$ dar.

c) Offenbar gilt

$$f_\alpha\big(f_\beta(\vec{a}\,)\big) = f_\alpha(\vec{a}\,) = \vec{a} = f_{\alpha+\beta}(\vec{a}\,)\,.$$

Ist $\vec{c}$ orthogonal zu $\vec{a}$, so haben wir

$$\begin{aligned} f_\alpha\big(f_\beta(\vec{c}\,)\big) &= f_\alpha\big((\cos\beta)\vec{c} + (\sin\beta)(\vec{a} \times \vec{c}\,)\big) = (\cos\beta)f_\alpha(\vec{c}\,) + (\sin\beta)f_\alpha(\vec{a} \times \vec{c}\,) \\ &= (\cos\beta)\big((\cos\alpha)\vec{c} + (\sin\alpha)(\vec{a} \times \vec{c}\,)\big) + (\sin\beta)\big((\cos\alpha)(\vec{a} \times \vec{c}\,) + (\sin\alpha)(-\vec{c}\,)\big) \\ &= (\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha)\vec{c} + (\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha)(\vec{a} \times \vec{c}\,) \\ &= \big(\cos(\alpha+\beta)\big)\vec{c} + \big(\sin(\alpha+\beta)\big)(\vec{a} \times \vec{c}\,) = f_{\alpha+\beta}(\vec{c}\,)\,. \end{aligned}$$

(Hierbei wurde $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{c}\,) = -\vec{c}$ verwendet.)

Der Vektor $\vec{a}$ lässt sich zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ergänzen. Wie wir gerade gesehen haben, stimmen die Abbildungen $f_\alpha \circ f_\beta$ und $f_{\alpha+\beta}$ auf einer solchen Basis überein; damit ist $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ bewiesen.

Aufgabe 4 **a)** Die beiden Vektoren haben offenbar Norm 1 und stehen senkrecht aufeinander. Das Vektorprodukt dieser Vektoren ist orthogonal zu beiden und hat zudem Norm 1 (denn $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\phi$, wobei ϕ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist). Wir wählen also

$$\frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

als dritten Vektor.

b) Auch hier gilt: Die beiden gegebenen Vektoren haben Norm 1 und sind orthogonal zueinander. Wir suchen nun einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ mit

$$\langle \vec{x}, \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 0 \qquad \text{und} \qquad \langle \vec{x}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix} \rangle = 0\,.$$

Komponentenweise geschrieben (und mit $\sqrt{2}$ bzw. 2 durchmultipliziert) heißt das

$$-ix_1 - x_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x_1 + ix_2 + (1+i)x_3 = 0\,.$$

Die erste Gleichung können wir mit $x_1 = 1$ und $x_2 = -i$ erfüllen. Die zweite Gleichung liefert dann $2 + (1+i)x_3 = 0$, also $x_3 = -2/(1+i) = -1+i$. Den so gefundenen Vektor $\vec{x}$ müssen wir nun noch normieren, also durch seine Norm teilen. Wir ergänzen daher den Vektor

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

Der zu ergänzende Vektor ist nicht eindeutig bestimmt, denn man kann ihn mit beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{C}$, für die $|c| = 1$ gilt, multiplizieren.

Aufgabe 5 **a)** Wir verwenden die Schreibweise $\pi_1 \xrightarrow{(i\,j)} \pi_2$ für $(i\ j) \circ \pi_1 = \pi_2$. (Dabei bezeichnet $(i\ j)$ die Transposition, die i und j vertauscht.) Dann haben wir

$$\pi \xrightarrow{(1\,3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\,5)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3\,5)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4\,5)} \mathrm{id}\,.$$

Das bedeutet $(4\ 5) \circ (3\ 5) \circ (2\ 5) \circ (1\ 3) \circ \pi = \mathrm{id}$, also $\pi = (1\ 3) \circ (2\ 5) \circ (3\ 5) \circ (4\ 5)$.

Nun müssen wir noch $f(\pi)$ bestimmen, d. h. wir müssen feststellen, wieviele Paare (i, j) mit $i < j$ und $\pi(i) > \pi(j)$ es gibt. Wir erhalten

$$(1,3), \quad (1,4), \quad (2,3), \quad (2,4), \quad (2,5), \quad (3,4),$$

die Fehlstandszahl ist also 6. Dies ist eine gerade Zahl, also ist π gerade. (Dies sieht man auch daran, dass sich π als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen darstellen lässt.)

b) Hier ergibt sich

$$\pi \xrightarrow{(1\,4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 2 & 4 & 8 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\,7)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & 8 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(3\,7)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5\,8)} \mathrm{id}\,.$$

Folglich hat π die Darstellung $\pi = (1\ 4) \circ (2\ 7) \circ (3\ 7) \circ (5\ 8)$.

Die Permutation hat folgende Fehlstände:

$$(1,3), (1,4), (1,7), (2,3), (2,4), (2,6), (2,7), (2,8), (3,4), (5,6), (5,7), (5,8), (6,7), (6,8)$$

Dies bedeutet $f(\pi) = 14$, die Permutation ist also ebenfalls gerade.

Aufgabe 6 Es seien $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ die Spalten von A. Definitionsgemäß heißt $\operatorname{rang}(A) = r$ folgendes: Es gibt unter den Spaltenvektoren r linear unabhängige, und $r+1$ dieser Vektoren sind stets linear abhängig.

Zunächst betrachten wir $UA = [U\vec{a}_1, \ldots, U\vec{a}_n]$. Diese Matrix hat Rang r, denn es gilt die folgende Äquivalenz:

$$\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k \text{ sind linear unabhängig} \iff U\vec{x}_1, \ldots, U\vec{x}_k \text{ sind linear unabhängig}$$

(Denn: Aus $\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{x}_k = \vec{0}$ folgt $\lambda_1 U\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_k U\vec{x}_k = U(\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{x}_k) = \vec{0}$. Umgekehrt folgt aber aus $\lambda_1 U\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_k U\vec{x}_k = \vec{0}$ auch $\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{x}_k = \vec{0}$, weil U regulär, die zugehörige lineare Abbildung also injektiv ist.)

Nun folgt die Behauptung, wenn man beachtet, dass mit V auch V^T regulär ist:

$$\operatorname{rang}(UAV) = \operatorname{rang}(AV) = \operatorname{rang}\big((AV)^T\big) = \operatorname{rang}(V^T A^T) = \operatorname{rang}(A^T) = \operatorname{rang}(A)$$

Bemerkung: Die Aussage gilt offenbar auch für $A \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ und $U \in \mathbb{C}^{(m,m)}$, $V \in \mathbb{C}^{(n,n)}$.

Aufgabe 7 Ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

orthogonal, so haben insbesondere beide Spaltenvektoren die Norm 1. Es gilt folglich $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$; daher existiert ein Winkel $\phi_1 \in [0, 2\pi)$ mit $(\alpha, \gamma) = (\cos\phi_1, \sin\phi_1)$. Ebenso gilt $\beta^2 + \delta^2 = 1$, also existiert ein Winkel $\phi_2 \in [0, 2\pi)$ mit $(\delta, -\beta) = (\cos\phi_2, \sin\phi_2)$. Die Matrix hat somit die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi_1 & -\sin\phi_2 \\ \sin\phi_1 & \cos\phi_2 \end{pmatrix}.$$

Da A orthogonal ist, stehen die beiden Spalten senkrecht aufeinander, d. h. es gilt

$$0 = -\cos\phi_1 \sin\phi_2 + \sin\phi_1 \cos\phi_2 = \sin(\phi_1 - \phi_2)\,.$$

Hieraus folgt $\phi_1 - \phi_2 = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Daher ist

$$-\sin\phi_2 = -\sin(\phi_1 - k\pi) = -(-1)^k \sin\phi_1, \quad \cos(\phi_2) = \cos(\phi_1 - k\pi) = (-1)^k \cos\phi_1.$$

Mit $c := \cos\phi_1$ und $s := \sin\phi_1$ haben wir also die behauptete Darstellung.

Aufgabe 8 folgt auf der nächsten Seite (dort steht noch aus versehen Aufgabe 5)

5.) Es muss gelten $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

$C\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in (1) eingesetzt, von links mit C^{-1} multipliziert ergibt

$\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix} = \underbrace{C^{-1} A C}_{=D}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. D soll diagonal sein. Wie in der Vorlesung rechnen wir: $C^{-1}AC = D \leftrightarrow AC = CD$

Sei etwa $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ und $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, so gilt:

$AC = (\vec{c}_1 \vec{c}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = (\lambda_1 \vec{c}_1 \;\; \lambda_2 \vec{c}_2)$, also $A\vec{c}_i = \lambda_i \vec{c}_i$,

bzw. $(A - \lambda_i E)\vec{c}_i = 0 \qquad (i = 1,2)$.

Wir berechnen zuerst λ_1, λ_2: Für diese Werte ist $(A - \lambda_i)$ nicht regulär, also $0 \overset{!}{=} \det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(4-\lambda) - (-6)\cdot 1$

$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$

Wir wählen also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Bei geeigneter Wahl gilt dann $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Nun berechnen wir die $\vec{c}_i$: Es muß gelten $(A - \lambda_i E)\vec{c}_i = 0$

$$\left.\begin{aligned} (A - 1E)\vec{c}_1 &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\vec{c}_1, \text{ etwa } \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ (A - 2E)\vec{c}_2 &= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\vec{c}_2, \text{ etwa } \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ Damit } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} \dot u = u \\ \dot v = 2v \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} u(t) = a \cdot e^t \\ v(t) = b \cdot e^{2t} \end{cases}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \cdot e^x \\ b \cdot e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{matrix} a e^t + b e^{2t} \\ 2a e^t + 3b e^{2t} \end{matrix}$

Die Lösungen x, y der ursprünglichen Gleichung lauten somit

$x(t) = a \cdot e^t + b e^{2t}$
$y(t) = 2a e^t + 3b e^{2t}$