Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. M. Muzzulini SS 2008

6. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (T) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte?

Aufgabe 2 (T) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

und geben sie eine reguläre Matrix C an, so dass $C^{-1}AC$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 3 (T) (Letzte HM II Klausuraufgabe)

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie die geometrische und die algebraische Vielfachheit der jeweiligen Eigenwerte an.

c) Geben Sie die maximale Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren von M an.

d) Entscheiden Sie, ob M diagonalisierbar ist. Begründen Sie dies auf zwei Arten.

Aufgabe 4 (Ü) Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ nennen wir *simultan diagonalisierbar*, wenn es eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ gibt, so dass die beiden Matrizen $C^{-1}AC$ und $C^{-1}BC$ Diagonalgestalt haben. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Sind A, B simultan diagonalisierbar, so gilt $AB = BA$.

b) Haben alle Eigenwerte von A die algebraische Vielfachheit 1 und gilt $AB = BA$, so sind A, B simultan diagonalisierbar.

Hinweise: Zu **a)**: Machen Sie sich **zuerst** klar, dass die Aussage für diagonale Matrizen gilt (also etwa auch für A und B im Falle, dass $C = E$).
Zu **b)**: Wie sehen die Spalten einer Basiswechselmatrix aus? Zeigen Sie, dass jeder Eigenvektor von A auch ein Eigenvektor von B ist.

Aufgabe 5 (Ü) Wir betrachten den Raum l^2, der quadratsummierbaren Folgen in $\mathbb{R}$, das heißt

$$l^2 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R} \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und } \sum a_n^2 < \infty\}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte, sowie die Dimensionen der Eigenräume der Rechtsverschiebung R und der Linksverschiebung L, das sind die linearen Funktionen:

$$\begin{aligned} &L : l^2 \to l^2,\ L\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}, \\ &R : l^2 \to l^2,\ R\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) := (a_{n-1})_{n\in\mathbb{N}},\ \text{mit } a_0 := 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (Ü) Seien $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{z} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

R sei die Spiegelung des $\mathbb{R}^3$ an der Ebene $\mathrm{Lin}(\vec{v}, \vec{w})$.
S sei die Spiegelung des $\mathbb{R}^4$ an $\mathrm{Lin}(\vec{x}, \vec{y})$, und T sei die Spiegelung des $\mathbb{R}^4$ an der Hyperebene $\mathrm{Lin}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
Geben Sie jeweils die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren an.

Aufgabe 7 (Ü) Seien S, T lineare Funktionen in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum. x sei ein Eigenvektor von beiden Funktionen, mit $Tx = \lambda x$ und $Sx = \mu x$. Zeigen Sie:

a) x ist ein Eigenvektor von $S + T$ und von $5T$ zum Eigenwert $\lambda + \mu$ bzw. zum Eigenwert 5λ.

b) x ist ein Eigenvektor von T^2 zum Eigenwert λ^2, allgemeiner von T^n zum Eigenwert λ^n. Ganz allgemein gilt für ein Polynom p, dass x ein Eigenvektor von $p(T)$ ist zum Eigenwert $p(\lambda)$.

c) Ist ν^2 ein positiver Eigenwert von T^2, so ist ν oder $-\nu$ ein Eigenwert von T. (Hinweis: betrachte $(T - \nu E)(T + \nu E)$.)

d) Geben Sie ein Beispiel für eine lineare Funktion R ohne Eigenwerte, für die R^2 jedoch einen Eigenwert hat.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.