Aufgabe 1 • Zunächst zur Matrix A. Eigenwerte von A sind die $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\det(A-\lambda E) = 0$.

$$\det\begin{pmatrix} 22-\lambda & -2 & -4 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[Z_1 \to Z_1 - Z_2]} \begin{pmatrix} 18-\lambda & -18+\lambda & 0 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$
$$=_{[S_1 \to S_1 + S_2]} \begin{pmatrix} 0 & -18+\lambda & 0 \\ 20-\lambda & 16-\lambda & -4 \\ 1 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } Z_1]} (18-\lambda)\det\begin{pmatrix} 20-\lambda & -4 \\ 1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (18-\lambda)\big((20-\lambda)(16-\lambda)+4\big) = (18-\lambda)\big(\lambda^2 - 36\lambda + 324) = -(\lambda-18)^3$$

Die Matrix besitzt also nur einen Eigenwert $\lambda_1 = 18$; dieser hat die algebraische Vielfachheit 3. Der zugehörige Eigenraum ist die Menge aller Lösungen von $(A-18E)\vec{x} = \vec{0}$. Wir betrachten daher

$$(A-18E) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alle Zeilen sind Vielfache voneinander, das Gleichungssystem reduziert sich also auf die eine Gleichung $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$. Diese hat die allgemeine Lösung $x_1 = s$, $x_3 = t$, $x_2 = 2s - 2t$. Es folgt

$$E(18) = \left\{ s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : s,t \in \mathbb{C} \right\} = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Der Eigenraum ist zweidimensional, d. h. $\lambda_1 = 18$ hat die geometrische Vielfachheit 2.

• Jetzt zur Matrix B. Wir betrachten $(B-\lambda E)$:

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + (1-\lambda)Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ 0 & -\lambda & 2-2\lambda \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Entwickeln nach der ersten Spalte liefert

$$\det(B-\lambda E) = -\det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ -\lambda & 2-2\lambda \end{pmatrix} = -\big(2-2\lambda-\lambda^2(1-\lambda)\big) = (\lambda^2-2)(1-\lambda)\,.$$

Die Matrix B hat somit drei Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Diese haben jeweils die algebraische Vielfachheit 1.

Wir bestimmen nun den Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$, also die Lösungsmenge von $(B-E)\vec{x} = \vec{0}$. Mit der Umformung $(*)$ wird $(B-E)$ zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir lesen ab: $x_2 = 0$ und $x_1 + x_3 = 0$. Der Eigenraum ist also

$$E(1) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Schließlich müssen wir noch die zu den beiden Eigenwerten $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ gehörenden Eigenräume bestimmen. Wenn im folgenden $\pm$ oder $\mp$ auftritt, bezieht sich das obere Zeichen stets auf λ_2 und das untere auf λ_3. Aus $(*)$ gewinnen wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \mp\sqrt{2}(1\mp\sqrt{2}\,) \\ 0 & \mp\sqrt{2} & 2\mp 2\sqrt{2} \\ -1 & 0 & \mp\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mp\sqrt{2}+2 \\ 0 & \mp\sqrt{2} & 2\mp 2\sqrt{2} \\ -1 & 0 & \mp\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Die zweite Zeile ist das $(\mp\sqrt{2}\,)$-fache der ersten, sie fällt also weg. Wir können x_3 beliebig wählen und erhalten $x_2 = (\pm\sqrt{2}-2)x_3$ und $x_1 = \mp\sqrt{2}\,x_3$. Das bedeutet

$$E(\sqrt{2}\,) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{und} \qquad E(-\sqrt{2}\,) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe 2 Wir berechnen die Determinante von $(A-\lambda E)$:

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_3\to Z_3+Z_2 \\ Z_4\to Z_4-Z_2}\right]} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix};$$

mit $S_2 \to S_2 + S_4$ und Entwicklung nach Z_4 folgt

$$= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix};$$

und $S_2 \to S_2 - S_3$ sowie Entwicklung nach Z_3 liefert

$$= (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)^2\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2\big((3-\lambda)(1-\lambda)-3\big) = (4-\lambda)^2(\lambda^2-4\lambda) = \lambda(\lambda-4)^3$$

Also: Die Matrix besitzt die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 4$ (mit algebraischer Vielfachheit 3). Wir bestimmen noch die Eigenräume:

Für $\lambda_1 = 0$ müssen wir das Gleichungssystem $(A-0E)\vec{x} = \vec{0}$, also $A\vec{x} = \vec{0}$ lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3\to Z_3+Z_2 \\ Z_4\to Z_4-Z_2}]{Z_1\to Z_1-3Z_2} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4\to Z_4+Z_3]{Z_1\to Z_1+2Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Wählen wir x_4 beliebig, so folgt aus der ersten Zeile $x_3 = -x_4$, aus der dritten $x_2 = x_4$ und aus der zweiten dann $x_1 = -x_4$. Wir haben also den Eigenraum

$$E(0) = \mathrm{Lin}(\vec{c}_1)\,, \qquad \text{wobei} \quad \vec{c}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt zu $\lambda_2 = 4$.

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Alle Zeilen sind Vielfache voneinander; es bleibt also nur eine Gleichung übrig. Wir können x_2, x_3 und x_4 beliebig wählen und erhalten $x_1 = x_2 - x_3 + x_4$. Es folgt

$$E(4) = \mathrm{Lin}(\vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4)\,, \qquad \vec{c}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4$ sind linear unabhängig, also leistet $C := [\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4]$ das Gewünschte

Aufgabe 3 a,b) Wir berechnen das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(M - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -3+\lambda & 3-\lambda & 0 \\ -3 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3-\lambda & -1 \\ -3+\lambda & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (3-\lambda)(\lambda-2)^2 \end{aligned}$$

(Schritte: erste Zeile von der zweiten abgezogen, erste Spalte zur zweiten dazugezählt, entwickelt)
Die Eigenwerte sind $la_1 = 3$ mit einfacher algebraischer Vielfachheit und $la_2 = 2$ mit zweifacher algebraischer Vielfachheit.
Eigenarum zu $\lambda_1 = 3$:

$$0 = (M - 3E)\vec{v} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0,$$

also $v_1 = 0$, $2v_2 = v_3$, $E_3 = \{t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\}$. Eigenarum zu $\lambda_2 = 2$:

$$0 = (M - 2E)\vec{v} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0,$$

also $v_1 = v_3$, $v_1 = v_3$, $E_2 = \{t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\}$. Die Geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte ist 1. **c)** M besitzt mximal 2 lin. unabh. Vektoren, etwa (siehe oben bei E_3 und E_2): $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **d)** M ist nicht diagonalisierbar, sonst müßte M drei lin. unabh. Eigenvektoren haben.
M ist nicht diagonalisierbar, sonst müßte für jeden Eigenwert die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen sein.

Aufgabe 4 **a)** Wir zeigen zunächst folgendes: Für Matrizen $S = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ und $T = \operatorname{diag}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ gilt stets $ST = TS$. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} ST &= S[\tau_1\vec{e}_1, \ldots, \tau_n\vec{e}_n] = [\tau_1 S\vec{e}_1, \ldots, \tau_n S\vec{e}_n] = [\tau_1\sigma_1\vec{e}_1, \ldots, \tau_n\sigma_n\vec{e}_n] \\ &= [\sigma_1\tau_1\vec{e}_1, \ldots, \sigma_n\tau_n\vec{e}_n] = [\sigma_1 T\vec{e}_1, \ldots, \sigma_n T\vec{e}_n] = T[\sigma_1\vec{e}_1, \ldots, \sigma_n\vec{e}_n] = TS\,. \end{aligned}$$

Nun kommen wir zum eigentlichen Beweis: Da A, B simultan diagonalisierbar sind, existiert eine reguläre Matrix C, so dass $C^{-1}AC$ und $C^{-1}BC$ Diagonalgestalt haben. Wie wir eben gesehen haben, ist dann

$$(C^{-1}AC)(C^{-1}BC) = (C^{-1}BC)(C^{-1}AC)\,, \qquad \text{also} \qquad C^{-1}ABC = C^{-1}BAC\,.$$

Multiplikation mit C von links und mit C^{-1} von rechts liefert die Gleichung $AB = BA$.

b) Da alle Eigenwerte von A algebraische Vielfachheit 1 haben, besitzt die Matrix n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Wählen wir dazu Eigenvektoren $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$, so sind diese linear unabhängig, und für $C := [\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n]$ hat $C^{-1}AC$ Diagonalgestalt. Dann ist

$$AB\vec{c}_j \overset{\text{Vor.}}{=} BA\vec{c}_j = B\lambda_j\vec{c}_j = \lambda_j B\vec{c}_j \qquad (j = 1, \ldots, n)\,,$$

d. h. $B\vec{c}_j$ liegt im Eigenraum von A zum Eigenwert λ_j, also in $L(\vec{c}_j)$. Es gilt somit $B\vec{c}_j = \mu_j\vec{c}_j$ für ein gewisses μ_j. Das bedeutet: $\vec{c}_j$ ist ein Eigenvektor von B. Folglich sind $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$ linear unabhängige Eigenvektoren von B, und hieraus folgt, dass $C^{-1}BC$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 5 Gesucht: die Eigenwerte des Linksschifts L. Für einen Eigenwert λ muss gelten $L(a_n) = \lambda(a_n)$ für eine Folge $(0) \neq (a_n) \in l^2$. Wir können damit rechnen:

$$\begin{aligned} &(L - \lambda)(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_{n+1} - \lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \\ &\leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = \lambda a_n \\ &\leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}\forall n \in \mathbb{N} : a_n = k\lambda^n. \end{aligned}$$

Ist $k = 0$, so wäre $(a_n) = 0$, also können wir $k = 1$ setzen.
Da (a_n) in l^2 liegt, muss nun gelten $\sum a_n^2 = \sum \lambda^{2n} < \infty$, was genau für $|\lambda| < 1$ gilt. Damit sind genau alle $\lambda \in (-1, 1)$ Eigenwerte von L mit zugehörigen Eigenräumen $\operatorname{Lin}\big((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$. Diese haben also algebraische Vielfachheit 1.

Nun sind Gesucht: die Eigenwerte des Rechtsschifts R. Für einen Eigenwert λ muss gelten $R(a_n) = \lambda(a_n)$ für eine Folge $(0) \neq (a_n) \in l^2$. Wir können damit rechnen:

$$(R - \lambda)(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_{n-1} - \lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n-1} = \lambda a_n.$$

Mit $a_0 := 0$. Erster Fall $\lambda \neq 0$: damit gilt $a_1 = \frac{1}{\lambda}a_0 = 0$ und entsprechend $0 = a_2 = a_3 = ...$, also $(a_n) = (0)$.
Zweiter Fall $\lambda = 0$. Damit haben wir im $n + 1$ten Eintrag: $a_n = 0$, also wiederum $(a_n) = (0)$.
R hat also keine Eigenwerte.

Aufgabe 6 Bei einer Spiegelung werden Vektoren, die auf der Spiegelebene liegen auf sich selbst abgebildet, außerdem wird ein Vektoren $\vec{u}$, der senkrecht zur Spiegelebene liegt, auf $-\vec{u}$ abgebildet. Derart Vektoren haben wir in jedem der Fälle genügend. Damit haben wir in jedem der drei Fälle genau die Eigenwerte 1 und -1 mit folgenden Eigenräumen:

Für R: $E(1) = \text{Lin}(\vec{v}, \vec{w})$, $E(-1) = \text{Lin}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ (dieser Vektor steht senkrecht auf $\vec{v}$ und auf $\vec{w}$.)

Für S: $E(1) = \text{Lin}(\vec{x}, \vec{y})$, $E(-1) = \text{Lin}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ (beide senkrecht auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$.)

Für T: $E(1) = \text{Lin}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, $E(-1) = \text{Lin}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ (senkrecht auf $\vec{x}$, $\vec{y}$ und auf $\vec{z}$.)

Aufgabe 7

a) $(S+T)(x) = S(x) + T(x) = \mu x + \lambda x = (\lambda + \mu)x$. $(5T)(x) = 5\lambda x$.

b) $T^2(x) = T(T(x)) = T(\lambda x) = \lambda T(x) = \lambda\lambda x = \lambda^2 x$. Allgemeiner mit VI:
$IV: T^n(x) = \lambda^n x$.
Der Induktionsanfang ($n = 1$) ist gegeben. Wir haben sogar schon $n = 2$ gezeigt.
$IS\ (n \to n+1): T^{n+1}(x) = T(T^n(x)) = T(\lambda^n x) = \lambda^n T(x) = \lambda^n \lambda x = \lambda^{n+1} x$.
Damit gilt für $p(X) = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$:

$$p(T)(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n T^n(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n x = p(\lambda)x.$$

c) Sei x ein Eigenvektor von T^2 zum Eigenwert ν^2. Dann gilt
$(T - \nu E)((T + \nu E)(x)) = T((T + \nu E)(x)) - \nu(T + \nu E)(x) =$
$T(T(x)) + T(\nu x) - \nu T(x) - \nu^2 x = T^2(x) - \nu^2 x = 0$.
Damit ist entweder $(T + \nu E)(x) = 0$, also x ein Eigenvektor von T zum Eigenwert $-\nu$, oder $(T + \nu E)(x) \neq 0$, dann ist $(T + \nu E)(x)$ ein Eigenvektor von T zum Eigenwert ν.

d) Die Rotation im $\mathbb{R}^2$ um $\pi/2$ hat keinen Eigenwert. Die Rotation im $\mathbb{R}^2$ um π bildet jedes $x \in \mathbb{R}^2$ auf $-x$ ab.