Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. M. Muzzulini SS 2008

7. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (T)
Gegeben sei die reelle, symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die folgende Äquivalenz besteht:

$$A \text{ ist positiv definit} \iff a_1 > 0\,, \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} > 0\,, \quad \det(A) > 0\,.$$

Geben Sie ein entsprechendes Kriterium für „negativ definit" an.

Aufgabe 2 (T)
Untersuchen Sie, gegebenenfalls in Abhängigkeit von auftretenden Konstanten, ob die folgenden Matrizen positiv definit sind. Sie können dazu das Ergebnis aus Aufgabe 1 benutzen.

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = (b_{kl})_{k,l=1,\ldots,n}\,, \quad \text{wobei } b_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 2, & |k-l| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3 (T)
Betrachten Sie den folgenden Kegelschnitt (Quadrik).

$$Q \ : \ x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1 - 9x_2 = 0\,.$$

Bringen Sie diesen Kegelschnitt auf Normalform wie folgt: Schreiben Sie Q in der Form $\vec{x}^T A\vec{x} + 2\vec{b}^T\vec{x} = 0$ mit symmetrischem A. Diagonalisieren Sie A mit einer orthogonalen Basiswechselmatrix, d.h. finden Sie eine reguläre orthogonale Matrix V, so dass V^TAV Diagonalgestalt hat.
Setzen Sie $\vec{x} := V\vec{z}$ und setzen Sie dies in die Gleichung des Kegelschnitts ein. Ergänzen Sie quadratisch zu einer Gleichung die einer der folgenden Gestalten hat

$$a_1(z_1+b_1)^2+a_2(z_2+b_2)^2+c = 0,\ \ a_1(z_1+b_1)^2+a_2(z_2+b_2) = 0 \text{ oder } a_1(z_1+b_1)+a_2(z_2+b_2)^2 = 0\,.$$

Führen Sie nun erneut neue Variablen ein, nämlich $\vec{y} = \binom{y_1}{y_2}$ mit $y_1 = z_1 + b_1$ und $y_2 = z_2 + b_2$. Wie sieht Q in den neuen Variablen aus? Was für eine Gestalt hat Q geometrisch?
Mit welcher Koordinatentransfomration erhält man $\vec{y}$ aus $\vec{x}$.

Aufgabe 4 (Ü) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix.

a) Zeigen Sie, dass man im $\mathbb{R}^n$ durch $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_A := \vec{y}^T A \vec{x}$ ein Skalarprodukt definieren kann.

b) Unser Ziel ist es nun, ein Verfahren (das sogenannte CG-Verfahren) zu erlernen, mit dem man schnell eine Lösung der Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ berechnen kann (bei vorgegebenem $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$). Zur Erinnerung: A ist symmetrisch und positiv definit. Das ist für dieses Verfahren nötig.
Im Folgenden gebrauchen wir neben dem mit A gewichteten Skalarprodukt noch die zugehörige Norm $\|\vec{z}\|_A = (\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle_A)^{1/2}$ und auch die Euklidische Norm $\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = \vec{z}^T \vec{z} = \vec{z} \cdot \vec{z}$ im $\mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie zuerst folgendes: Ist $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $\langle \vec{b}_k, \vec{b}_j \rangle_A = \vec{b}_k^T A \vec{b}_j = \delta_{jk}$, so ist $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle \vec{b}_j$ die Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$.
(Hinweis: zeigen Sie $\langle A\vec{x}, \vec{b}_k \rangle = \langle \vec{b}, \vec{b}_k \rangle$.)

Um eine solche Basis zu erhalten, wenden wir eine Verallgemeinerung des Gram-Schmidt Verfahrens an: Seien $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ linear unabhängig. Im ersten Schritt wählen wir $\vec{d}_1 := \vec{r}_1$ und normieren diesen zu $\vec{b}_1 := \vec{d}_1 / \|\vec{d}_1\|_A$.
Für $2 \leq k \leq n$ setzen wir im k-ten Schritt: $\vec{d}_k := \vec{r}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \vec{r}_k, \vec{b}_j \rangle_A \vec{b}_j$, und normieren diesen wieder zu $\vec{b}_k := \vec{d}_k / \|\vec{d}_k\|_A$.
Zeigen Sie, dass dieses Verfahren eine Basis mit allen gewünschten Eigenschaften liefert.

Wir haben nun noch die Freiheit in der Wahl der Vektoren $\vec{r}_j$. Und genau hier liegt der Trick! Wir setzen:
$\vec{r}_1 := \vec{b}$ und für $k > 1$: $\vec{r}_k := A\vec{x}_k - \vec{b}$, wobei $\vec{x}_k$ die $k-te$ Näherungslösung ist, d.h. $\vec{x}_k = \sum_{j=1}^{k} \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle \vec{b}_j$. (Diese Näherungslösung wird in jedem Schritt um einen Summanden ergänzt, ist also ohne großen zusätzlichen Aufwand stets berechnet.)

Zeigen Sie:
- Ist $\vec{x}_k$ nicht schon die gesuchte Lösung (in diesem Fall wären wir schon am Ziel), dann ist $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_k$ linear unabhängig. (Zeigen Sie $\langle \vec{r}_k, \vec{r}_j \rangle = 0$ für $j < k$).
- Für $1 \leq j \leq k-2$ gilt $\vec{b}_j^T A \vec{r}_k = 0$.
- Was bringt das für den Algorithmus?

Ergänzender Hinweis: Das CG-Verfahren eignet sich auch hervorragend, um im Falle, dass n sehr groß ist, schnell eine sehr gute Näherungslösung zu finden.

c) Für stetige Funktionen $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 g^T(x) A f(x) \, dx.$$

Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem Raum der stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}^n$ ist.
Benötigen wir, dass A positiv definit oder symmetrisch ist?
Darf A eventuell von x abhängen? Das heißt, würde $\langle f, g \rangle := \int_0^1 g^T(x) A(x) f(x) \, dx$ auch ein Skalarprodukt auf dem Raum der stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}^n$ definieren, wenn für jedes $x \in [0,1]$ die Matrix $A(x)$ positiv definit wäre?

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.