Aufgabe 1 Die reelle Matrix A ist symmetrisch. Es gibt daher ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. (Es müssen nicht unbedingt drei *verschiedene* Eigenwerte sein.) Wir wissen, dass $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ gilt.

Wir halten außerdem noch folgendes fest: Ist A positiv definit, so gilt dies auch für $A_1 := \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{smallmatrix}\right)$, denn für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ ist dann

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} > 0\,.$$

Zum Beweis der Äquivalenz: Mit A ist auch A_1 positiv definit, und aus der Vorlesung wissen wir, dass dies äquivalent ist zu $a_1 > 0$ und $\det(A_1) > 0$. Da A positiv definit ist, müssen alle Eigenwerte > 0 sein, d. h. es gilt auch $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$.

Ist umgekehrt die rechte Seite der zu beweisenden Äquivalenz erfüllt, so folgt, dass A_1 positiv definit ist und zudem $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$ gilt. Angenommen, A sei nicht positiv definit. Dann muss mindestens ein Eigenwert ≤ 0 sein. Wegen $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$ bedeutet das aber: Zwei der Eigenwerte müssen < 0 sein; o.B.d.A. seien dies λ_1 und λ_2. Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ gilt dann (weil $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ ein Orthonormalsystem ist)

$$\begin{aligned}(\alpha\vec{c}_1 + \beta\vec{c}_2)^T A(\alpha\vec{c}_1 + \beta\vec{c}_2) &= (\alpha\vec{c}_1 + \beta\vec{c}_2)^T(\alpha\lambda_1\vec{c}_1 + \beta\lambda_2\vec{c}_2) \\ &= \alpha^2\lambda_1\vec{c}_1^{\,T}\vec{c}_1 + \alpha\beta(\lambda_1+\lambda_2)\vec{c}_1^{\,T}\vec{c}_2 + \beta^2\lambda_2\vec{c}_2^{\,T}\vec{c}_2 = \alpha^2\lambda_1 + \beta^2\lambda_2 < 0\,.\end{aligned}$$

Jetzt wählen wir $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ derart, dass der Vektor $\vec{x} := \alpha\vec{c}_1 + \beta\vec{c}_2$ als dritte Komponente 0 hat. Es gilt also $\vec{x} = (\mu, \nu, 0)$ mit gewissen $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, und für $\vec{x}_1 := (\mu, \nu)$ ergibt sich $\vec{x}_1^{\,T} A_1 \vec{x}_1 = \vec{x}^{\,T} A \vec{x} < 0$, im Widerspruch zur positiven Definitheit von A_1. Damit ist die Äquivalenz gezeigt.

Als Kriterium für negative Definitheit erhalten wir:

$$\begin{aligned}&A \text{ ist negativ definit} \iff -A \text{ ist positiv definit} \iff \\ &\quad -a_1 > 0,\ \det(-A_1) > 0,\ \det(-A) > 0 \iff a_1 < 0,\ \det(A_1) > 0,\ \det(A) < 0\end{aligned}$$

Das Vorzeichen der Determinanten muss also, mit $-$ beginnend, abwechseln.

Bemerkung: Mit vollständiger Induktion kann man die entsprechenden Aussagen auch für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ zeigen.

Aufgabe 2 Für die Matrix A_β verwenden wir das Kriterium aus Aufgabe 1. Es gilt

$$1 > 0 \qquad \text{und} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0\,;$$

die ersten beiden Bedingungen sind also erfüllt. Die Matrix ist somit genau dann positiv definit, wenn ihre Determinante > 0 ausfällt. Wegen

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \to Z_2 + 2Z_1]} \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } S_1]} \det\begin{pmatrix} 4 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = 4 - \beta^2$$

ergibt sich: A_β ist genau dann positiv definit, wenn $-2 < \beta < 2$.

Nun zur Matrix B. Die beiden ersten Zeilen $\vec{b}_1^T$ und $\vec{b}_2^T$ von B sehen wie folgt aus:

$$\vec{b}_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b}_2^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Bilden wir $\vec{x}^T B \vec{x}$ für $\vec{x} = (1, 0, \dots, 0)$, so ergibt sich folglich 1, wählen wir dagegen $\vec{x} = (1, -1, 0, \dots, 0)$, so ist $B\vec{x} = (-1, 1, *, \dots, *)$, wobei $*$ hier für irgendwelche Zahlen steht, also $\vec{x}^T B \vec{x} = -2$. Die Matrix B ist somit indefinit.

Dies gilt allerdings nur für $n \geq 2$, denn für $n = 1$ ist $B = (1)$ natürlich positiv definit.

Aufgabe 3 Wir schreiben die Gleichung zunächst in der Form

$$Q \ : \ \vec{x}^T A \vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} = 0\,, \qquad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} 3/2 \\ -9/2 \end{pmatrix}.$$

Als erstes müssen wir nun die Matrix A diagonalisieren. Wegen

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2)$$

folgt: Die Matrix hat die beiden Eigenwerte 0 und 2. Wir bestimmen die Eigenräume:

$$A - 0E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

liefert

$$E(0) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad E(2) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Folglich haben wir

$$V^T A V = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei} \quad V := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Dabei haben wir die Spalten von V so gewählt, dass $\det(V) = 1$ gilt und die zu $E(0)$ gehörenden Eigenvektoren (hier nur einer) in den letzten Spalten stehen.) Wir führen jetzt neue Koordinaten z_1 und z_2 mittels $(z_1, z_2) := \vec{z} := V^T \vec{x}$ ein, setzen also in obiger Gleichung $\vec{x} = V\vec{z}$. Dies liefert

$$(V\vec{z})^T A (V\vec{z}) + 2\vec{b}^T (V\vec{z}) = 0\,, \qquad \text{also} \qquad \vec{z}^T V^T A V \vec{z} + 2(V^T \vec{b})^T \vec{z} = 0\,.$$

Wegen $V^T A V = \operatorname{diag}(2, 0)$ und $V^T \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 3/3 \\ -9/2 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(6, -3)$ bedeutet dies

$$2z_1^2 + 6\sqrt{2}\, z_1 - 3\sqrt{2}\, z_2 = 0\,.$$

Hier nehmen wir noch eine quadratische Ergänzung vor:

$$2(z_1 + \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\,)^2 - 9 - 3\sqrt{2}\, z_2 = 0\,, \qquad \text{also} \qquad 2(z_1 + \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\,)^2 - 3\sqrt{2}(z_2 + \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\,) = 0\,.$$

Mit den neuen Koordinaten $y_1 := z_1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ und $y_2 := z_2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ haben wir also die Normalform $2y_1^2 - 3\sqrt{2}\, y_2$. Es handelt sich um eine Parabel.

Die Koordinatentransformation, die wir durchgeführt haben, war

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{z} + \tfrac{3}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V^T \vec{x} + \tfrac{3}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 3 \\ x_1 + x_2 + 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

a) Seien $\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\langle \vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2, \vec{y} \rangle_A = \vec{y}^T A(\vec{x}_1 + \lambda\vec{x}_2) = \vec{y}^T A\vec{x}_1 + \lambda\vec{y}^T A\vec{x}_2) = \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle_A + \lambda\langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle_A.$$

Da A symmetrisch ist, gilt $A = A^T$ und damit

$$\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle_A = \vec{x}^T A\vec{y} = (\vec{x}^T A\vec{y} =)^T = \vec{y}^T A\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_A.$$

Schließlich gilt $\vec{x}^T A\vec{x} \geq 0$ für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, wobei Gleichheit nur gilt im Falle, dass $\vec{x} = 0$.
(Falls dies nicht klar sein sollte: Sei $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_j > 0$, so gilt $\vec{x} = \sum a_j\vec{b}_j$ für gewisse Zahlen $\vec{b}_j$ die nur im Falle $\vec{x} = 0$ alle gleich Null sind. Damit erhalten wir

$$\vec{x}^T A\vec{x} = (\sum_{j=1}^{n} a_j\vec{b}_j)^T A(\sum_{k=1}^{n} a_k\vec{b}_k) = \sum_{j,k=1}^{n} \vec{b}_j^T A\vec{b}_k = \sum_{j,k=1}^{n} \lambda_k\vec{b}_j^T\vec{b}_k = \sum_{j,k=1}^{n} \lambda_k\delta_{jk} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Die rechte Seite ist nicht negativ und nur im Falle $\vec{x} = 0$ gleich Null.

b) Sei $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $\langle \vec{b}_k, \vec{b}_j \rangle_A = \vec{b}_k^T A\vec{b}_j = \delta_{jk}$. Wir müssen zeigen, dass $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle \vec{b}_j$ die Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ ist. Es gilt für alle $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} \langle A\vec{x}, \vec{b}_k \rangle &= \langle A \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle \vec{b}_j, \vec{b}_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle \langle A\vec{b}_j, \vec{b}_k \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle \langle \vec{b}_j, \vec{b}_k \rangle_A = \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle \delta_{jk} = \langle \vec{b}, \vec{b}_k \rangle. \end{aligned}$$

Un damit $\vec{x} = \vec{b}$.

Jeder der Vektoren $\vec{b}_j$ ist so genormt, dass $\vec{b}_j^T A\vec{b}_j = \langle \vec{b}_j, \vec{b}_j \rangle = 1$.
Wir zeigen mit VI, dass gilt $\langle \vec{b}_k, \vec{b}_j \rangle = 1$ für alle $1 \leq j < k \leq n$ (IV) mit Induktion über k. Der Induktinsanfang ($k = 1$) ist trivial.
(IS) ($k \to k + 1 \leq n$): Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \vec{d}_k, \vec{b}_j \rangle &= \langle \vec{r}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \vec{r}_k, \vec{b}_j \rangle_A \vec{b}_j, \vec{b}_j \rangle = \langle \vec{r}_k, \vec{b}_j \rangle_A \vec{b}_j, \vec{b}_j \rangle - \sum_{l=1}^{k-1} \langle \vec{r}_k, \vec{b}_l \rangle_A \langle \vec{b}_l, \vec{b}_j \rangle \\ &= \langle \vec{r}_k, \vec{b}_j \rangle_A \vec{b}_j, \vec{b}_j \rangle - \sum_{l=1}^{k-1} \langle \vec{r}_k, \vec{b}_l \rangle_A \delta_{jl} = \langle \vec{r}_k, \vec{b}_j \rangle_A \vec{b}_j, \vec{b}_j \rangle - \langle \vec{r}_k, \vec{b}_j \rangle_A = 0. \end{aligned}$$

Da $\vec{b}_k$ ein Vielfaches von $\vec{d}_k$ ist, folgt $\langle \vec{b}_k, \vec{b}_j \rangle = 0$.

Wäre $\vec{x}_k$ nicht schon die gesuchte Lösung, so erhielten wir $\vec{r}_k = 0$, weshalb das Verfahren nun keine Veränderung mehr brächte und auch nicht unseren Vorgaben entspräche, jedoch wir hätten damit schon die gesuchte Lösung $\vec{x}$. Ansonsten ist $\vec{r}_k \neq 0$.

Für $1 \leq j < k \leq n$ zeigt die Rechnung

$$\begin{aligned}\langle \vec{r}_k, \vec{b}_j \rangle &= \langle A\vec{x}_{k-1} - \vec{b}, \vec{b}_j \rangle = \left\langle A\vec{x}_{k-1}, \vec{b}_j \right\rangle - \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle \\ &= \left\langle A \sum_{l=1}^{k-1} \langle \vec{b}, \vec{b}_l \rangle \vec{b}_l, \vec{b}_j \right\rangle - \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle = \sum_{l=1}^{k-1} \langle \vec{b}, \vec{b}_l \rangle \left\langle \vec{b}_l, \vec{b}_j \right\rangle_A - \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} \langle \vec{b}, \vec{b}_l \rangle \delta jl - \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle = \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b}_j \rangle = 0,\end{aligned}$$

dass $\vec{r}_k$ senkrecht auf $\mathrm{Lin}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_{k-1}) = \mathrm{Lin}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_{k-1})$ steht. Ist $\vec{r}_k \neq 0$, so haben wir damit gezeig, dass $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_k$ linear unabhängig ist.

Es fehlt noch zu zeigen, dass für $1 \leq j \leq k-2$ gilt $\langle \vec{r}_k, \vec{b}_j \rangle_A$:

$$\begin{aligned}0 &= 0 - 0 = \langle r_k, r_j \rangle - big < r_{k-1}, r_j \rangle = \langle r_k - r_{k-1}, r_j \rangle \\ &= \langle Ax_k - b - Ax_{k-1} + b, r_j \rangle = \langle A(x_k - x_{k-1}), r_j \rangle = \langle x_k - x_{k-1}, r_j \rangle_A \\ &= c\langle \vec{d}_k, r_j \rangle_A\end{aligned}$$

für eine Konstante $c \neq 0$. (Im Fall $j = 1$ muss diese Rechnung noch etwas angepasst werden.)

Was bringt uns das?

Der größte Aufwand in jedem Schritt ist die Berechnung des Vektors $\vec{d}_k$. Mit $\langle \vec{r}_k, \vec{b}_j \rangle_A$ für $1 \leq j \leq k-2$ wird aus

$$\vec{d}_k := \vec{r}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \vec{r}_k, \vec{b}_j \rangle_A \vec{b}_j,$$

was k Rechenschritte beinhaltet, die Rechnung $\vec{d}_k := \vec{r}_k - \langle \vec{r}_k, \vec{b}_j \rangle_A \vec{b}_{k-1}$.

c) Seien $f, f_1, f_2, g : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle f_1 + \lambda f_2, g \rangle &= \int_0^1 g^T(x) A (f_1 + \lambda f_2)(x)\ dx \\ &= \int_0^1 g^T(x) A f_1(x)\ dx + \lambda \int_0^1 g^T(x) A f_2(x)\ dx = \langle f_1, g \rangle + \lambda \langle f_2, g \rangle.\end{aligned}$$

Da A symmetrisch ist, gilt $A = A^T$ und damit

$$f^T(x) A g(x) = (f^T(x) A g(x))^T = g^T(x) A^T f(x) = g^T(x) A f(x).$$

Damit ergibt sich (einfach einsetzen): $\langle g, f \rangle = \langle f, g \rangle$.

$\langle f, f \rangle \geq 0$ ist klar, da der Integrand nie negativ wird. Ist $f \neq 0$, so ist $f(x) \neq 0$

für ein $x \in (0,1)$ und damit ist der stetige Integrand auf einer Umgebung dieses x echt positiv, und folglich $\langle f, f \rangle > 0$.

Ist A nicht symmetrisch, so gibt es ein Paar i, j, mit $a_{ij} \neq a_{ji}$. Wir setzen $f(x) := e_j$ und $g(x) := e_i$. für diese konstanten Funktionen gilt $g^T(x)Af(x) = e_i^T A e_j = a_{ij}$ und $f^T(x)Ag(x) = e_j^T A e_i = a_{ji}$ für jedes $x \in [0,1]$ und damit $\langle g, f \rangle = a_{ji} \neq a_{ij} = \langle f, g \rangle$.

Ist A zwar symmetrisch, aber nicht positiv definit, so gibt es $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq 0$ und $\vec{x}^T A \vec{x} \leq 0$. Setzten wir $f(x) = \vec{x}$, so gilt für diese konstante Funktion $\langle f, f \rangle = \vec{x}^T A \vec{x} \leq 0$.

A darf von x abhängen, solange die Funktion $x \mapsto g(x)^T A(x) f(x)$ noch integrierbar ist für alle stetigen Funktionen $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Diese Aussage ist in dieser Allgemeinheit zwar korrekt, jedoch mit unseren Mitteln kaum zu beweisen (wesentliches Argument im Beweis: das Lebesguemaß ist sigma-additiv). Das Problem ist die positive Definitheit.
Wir zeigen dies für den Fall, dass A stetig ist in allen Einträgen. Damit ist auch die Funktion $x \mapsto f^T(x)A(x)f(x)$ stetig, nicht negativ und nur dann überall gleich Null, wenn f die Nullfunktion ist. Mit dem Standardargument folgt $\langle f, f \rangle = 0 \to f = 0$.