Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. M. Muzzulini SS 2008

8. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (T)
Die Funktionen f, g und h sind gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x) &= x & (-\pi < x \le \pi), && f(x+2\pi) = f(x),\\ g(x) &= 1 + x + |x| & (-2 < x \le 2), && g(x+4) = g(x),\\ h(x) &= \cos(\tfrac{1}{2}x) & (-\pi < x \le \pi), && h(x+2\pi) = h(x). \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Fourierreihen dieser Funktionen.

Aufgabe 2 (T)
Betrachten Sie die Funktion $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, die durch $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$ gegeben ist. Entwickeln Sie f in eine

a) Cosinusreihe **b)** Sinusreihe

Hinweis: Sie müssen f jeweils unterschiedlich fortsetzen. Überlegen Sie sich dazu, ob die Summe von geraden bzw. ungeraden Funktionen (d.h. $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$) wieder gerade bzw. ungerade ist!

Aufgabe 3 (T)
Bestimmen Sie (unter Verwendung von Aufgabe 2) die Werte der Reihen

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots \qquad \text{und} \qquad 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots .$$

Hinweis: Finden Sie geeignete Werte von x.

Aufgabe 4 (Ü)
Bestimmen Sie eine 2π-periodische Lösung x der Differentialgleichung

$$-ie^{-it}\dot{x}(t) + x(t) = f(t)$$

mit $\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\, dt = 0$, wobei gelte $f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2kit}}{(2k)!}$. Verwenden Sie dazu für x einen Ansatz in Form einer trigonometrischen Reihe. Als Ergebnis begnügen wir uns mit einer Darstellung der Koeffizienten der Reihe durch einen Startwert und eine Rekursionsvorschrift.

Aufgabe 5 (Ü)
Sei V die Menge der beschränkten Funktionen $(-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$, die höchstens in endlich vielen Stellen unstetig sind.

a) Zeigen Sie: V ist ein Vektorraum

b) Zeigen Sie: Die zweistellige Funktion

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

erfüllt alle Eigenschaften eines Skalarproduktes auf V außer der Definitheit.
Außerdem gilt $\langle f, f \rangle = 0$ für $f \in V$ genau dann, wenn f höchstens an seinen Unstetigkeitsstellen einen Wert ungleich Null annimmt (insbesondere also an endlich vielen Stellen).

c) Zusatzaufgabe für Matheinteressierte:
Wir hätten gerne, dass die oben definierte Funktion tatsächlich ein Skalarprodukt ist. Dafür definieren wir für $f \in V$

$$[f] := \{g \in V : \langle f - g, f - g \rangle = 0\}.$$

Wir nennen $[f]$ die Klasse von f und jede Funktion $g \in [f]$ einen Vertreter dieser Klasse.
Zeigen Sie, dass für $f, g \in V$ gilt:

$$g \in [f] \qquad \longleftrightarrow \qquad f \in [g].$$

Zeigen Sie, dass $\hat{V} := \{[f] : f \in V\}$ ein Vektorraum ist und durch

$$\langle [f], [g] \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

ein Skalarprodukt auf $\hat{V}$ definiert wird.
Hinweis: Sie müssen hierfür zuerst zeigen, dass dieses Skalarprodukt wohldefiniert ist, d.h. für jedes Paar $[f], [g]$ liefert diese Definition genau eine komplexe Zahl.

(Gedanken dazu: Warum muss man dies hier zeigen, d.h. was könnte passieren? Als Beispiel für eine nicht wohldefinierte Funktion könnten Sie sich etwa diese Definition ansehen: $N : \hat{V} \to \mathbb{C}$, $N([f]) := f(0)$. Warum ist diese Defintion nicht in ordnung, also N nicht wohldefiniert?)

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.