Aufgabe 1 • Die Funktion f hat die Fourierkoeffizienten

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx}\, dx \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Es ergibt sich $\widehat{f}(0) = 0$, und für $k \neq 0$ liefert Produktintegration

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx}\, dx &= x \cdot \frac{e^{-ikx}}{-ik} \Big|_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{-ik}\, dx \\ &= \frac{\pi(-1)^k - (-\pi)(-1)^k}{-ik} - \frac{e^{ikx}}{(-ik)^2} \Big|_{x=-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi i(-1)^k}{k} - 0\,. \end{aligned}$$

(Beachte: Es gilt $e^{ik(\pm\pi)} = (-1)^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.) Also haben wir $\widehat{f}(k) = i(-1)^k/k$ für $k \neq 0$, und die Fourierreihe von f ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i(-1)^k}{k} (e^{ikx} - e^{-ikx})\,.$$

Wenn man will, kann man daraus auch noch die Koeffizienten in der Darstellung

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)\big)$$

der Fourierreihe gewinnen: Laut Vorlesung gilt

$$\alpha_k = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k) \quad (k \geq 0) \qquad \text{und} \qquad \beta_k = i\big(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)\big) \quad (k \geq 1)\,.$$

In unserem Falle ergibt sich $\alpha_k = 0$ und $\beta_k = 2(-1)^{k+1}/k$.

Bemerkung: Da f stückweise glatt ist, stellt die Fourierreihe die Funktion an allen Stetigkeitsstellen dar; an den Unstetigkeitsstellen $x_k = (2k+1)\pi$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) konvergiert die Fourierreihe gegen $\frac{1}{2}(f(\pi+) + f(\pi-)) = \frac{1}{2}(-\pi + \pi) = 0$.

• Die Funktion g ist nicht 2π-periodisch, sie hat vielmehr die Periode $T := 4$. Daher setzen wir $\omega := 2\pi/T$ und betrachten die 2π-periodische Funktion G, die gegeben ist durch $G(y) := g(y/\omega)$. Falls $x \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass die Funktion G an der Stelle ωx durch ihre Fourierreihe dargestellt wird, gilt

$$g(x) = G(\omega x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{G}(k) e^{ik\omega x}\,.$$

Diese Reihe heißt daher die Fourierreihe von g, und man schreibt $\widehat{g}(k) = \widehat{G}(k)$. Es gilt

$$\widehat{G}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(y) e^{-iky}\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y/\omega) e^{-iky}\, dy\,;$$

wegen $g(x) = 1$ für $x \in (-2, 0)$ und $g(x) = 1 + 2x$ für $x \in (0, 2)$ folgt

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky}\, dy + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} 2(y/\omega) e^{-iky}\, dy\,;$$

für $k=0$ ergibt sich hier $1+\frac{1}{2\pi}\cdot\pi^2/\omega=2$; sonst gilt (Produktintegration)

$$\begin{aligned}
&= 0+\frac{2}{2\pi\omega}\left(y\cdot\frac{e^{-iky}}{-ik}\,\Big|_{y=0}^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{e^{-iky}}{-ik}\,dy\right)=\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\pi(-1)^k}{-ik}-\frac{e^{-iky}}{(-ik)^2}\,\Big|_{y=0}^{\pi}\right)\\
&= \frac{2i(-1)^k}{k\pi}-\frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{(-1)^k-1}{-k^2}=\frac{2i(-1)^k}{k\pi}+\frac{2(-1)^k-2}{k^2\pi^2}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist die Fourierreihe berechnet. Will man noch die α_k und β_k bestimmen, so erhält man $\alpha_0=4$ und $\alpha_k=4((-1)^k-1)/(k^2\pi^2)$ sowie $\beta_k=4(-1)^{k+1}/(k\pi)$ für $k\geq 1$.

Bemerkung: Eine beliebige T-periodische Funktion g hat also die Fourierkoeffizienten

$$\widehat{g}(k)=\widehat{G}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(y/\omega)e^{-iky}\,dy=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}g(x)e^{-ik\omega x}\,dx\,,$$

wie man mit der Substitution $x=y/\omega$ einsieht.

• Die Funktion h ist wieder 2π-periodisch. Zur Abwechslung berechnen wir diesmal direkt die Koeffizienten α_k und β_k in der Cosinus/Sinus-Darstellung der Fourierreihe. Da h eine gerade Funktion ist, gilt $\beta_k=0$ für alle $k\in\mathbb{N}$. Für $k\geq 0$ ist

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(x)\cos(kx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\tfrac{1}{2}x)\cos(kx)\,dx$$

Zweimalige Produktintegration liefert

$$\begin{aligned}
I_k &:= \int_{-\pi}^{\pi}\cos(\tfrac{1}{2}x)\cos(kx)\,dx\\
&= 2\sin(\tfrac{1}{2}x)\cos(kx)\,\Big|_{x=-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}2\sin(\tfrac{1}{2}x)(-k\sin(kx))\,dx\\
&= 2\big(\cos(k\pi)+\cos(-k\pi)\big)+2k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx)\,dx\\
&= 4(-1)^k+2k\left(-2\cos(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx)\,\Big|_{x=-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}-2\cos(\tfrac{1}{2}x)(k\cos(kx))\,dx\right)\\
&= 4(-1)^k-0+4k^2I_k\,.
\end{aligned}$$

Somit haben wir die Gleichung $I_k=4(-1)^k+4k^2I_k$; dies bedeutet $I_k=4(-1)^k/(1-4k^2)$. Damit kennen wir $\alpha_k=I_k/\pi$ und es ergibt sich die Fourierreihe

$$\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{(1-4k^2)\pi}\cos(kx)\,.$$

Hieraus kann man auch die $\widehat{h}(k)$ ablesen, und zwar mittels der Formeln

$$2\widehat{h}(k)=\alpha_k-i\beta_k\qquad\text{und}\qquad 2\widehat{h}(-k)=\alpha_k+i\beta_k\qquad(\text{wobei }\beta_0:=0)\,.$$

Aufgabe 2 **a)** Eine reine Cosinusreihe ergibt sich für gerade Funktionen; also setzen wir f hier zu einer 2π-periodischen, geraden Funktion F fort:

$$F(x) := \begin{cases} x - \frac{\pi}{2}, & x \in [0, \pi], \\ -x - \frac{\pi}{2}, & x \in (-\pi, 0), \end{cases} \qquad F(x + 2\pi) := F(x)$$

Für die Fourierkoeffizienten α_k und β_k von F gilt dann $\beta_k = 0$ und

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \cos(kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \tfrac{\pi}{2}) \cos(kx)\, dx\,.$$

Offenbar ist $\alpha_0 = 0$ und für $k \neq 0$ haben wir

$$\int x \cos(kx)\, dx = \frac{x \sin(kx)}{k} - \int \frac{\sin(kx)}{k}\, dx = \frac{x \sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\,.$$

Folglich ist für $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x \sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2} \right) \Bigg|_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k - 1}{k^2} - 0\,.$$

Das bedeutet $\alpha_{2n} = 0$ (gilt auch für α_0) und $\alpha_{2n+1} = -4/((2n+1)^2\pi)$. Da F stetig und stückweise glatt ist, stellt die Fourierreihe die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ dar, es gilt also

$$x - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2 \pi} \cos((2n+1)x) \qquad \text{für } x \in [0, \pi]\,.$$

b) Eine reine Sinusreihe erhalten wir, wenn wir f zu einer ungeraden Funktion fortsetzen:

$$F(x) := \begin{cases} x - \frac{\pi}{2}, & x \in [0, \pi], \\ x + \frac{\pi}{2}, & x \in (-\pi, 0), \end{cases} \qquad F(x + 2\pi) := F(x)$$

Dann gilt $\alpha_k = 0$ für alle $k \geq 0$ und

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \sin(kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x - \tfrac{\pi}{2}) \sin(kx)\, dx$$

für alle $k \geq 1$. Produktintegration liefert

$$\int x \sin(kx)\, dx = -\frac{x \cos(kx)}{k} + \int \frac{\cos(kx)}{k}\, dx = -\frac{x \cos(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2}\,,$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x \cos(kx)}{k} + \frac{\sin(kx)}{k^2} \right) \Bigg|_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(kx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-\pi(-1)^k}{k} + \frac{\cos(kx)}{k} \Bigg|_{x=0}^{\pi} = \frac{-2(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{k} = -\frac{(-1)^k + 1}{k}\,. \end{aligned}$$

Also ist $\beta_{2n-1} = 0$ und $\beta_{2n} = -1/n$ für alle $n \geq 1$. Da F stückweise glatt ist, wird die Funktion in allen Stetigkeitsstellen durch ihre Fourierreihe dargestellt; wir erhalten also

$$x - \frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \sin(2nx) \qquad \text{für } x \in (0, \pi)\,.$$

(An den Stellen $x_k = k\pi$ konvergiert die Fourierreihe gegen $\frac{1}{2}(F(0+) + F(0-)) = 0$.)

Aufgabe 3 Setzen wir in die Darstellung aus **2 b)** $x = \pi/4$ ein, so ergibt sich

$$-\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\sin(n\pi/2) = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - + \cdots .$$

Die erste Reihe hat also den Wert $\pi/4$.

Setzen wir in die Darstellung aus **2 a)** $x = 0$ ein, so ergibt sich

$$-\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{(2n+1)^2\pi} = -\frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) .$$

Die zweite Reihe ergibt also $\pi^2/8$.

Aufgabe 4 Wir setzen

$$x(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

und nehmen an, dass diese Reihe konvergiert und man gliedweise differenzieren kann. Damit gilt

$$\begin{aligned}
-ie^{-it}\dot{x}(t) + x(t) &= -ie^{-it}\sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikt} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} kc_k e^{i(k-1)t} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k+1)c_{k+1} e^{ikt} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k + (k+1)c_{k+1}) e^{ikt}.
\end{aligned}$$

Dies muss gleich $f(t)$ sein, damit x eine Lösung ist. Das ist dann der Fall, wenn

$$\widehat{f}(k) = c_k + (k+1)c_{k+1} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

gilt. Da f gegeben ist, können wir auch $\widehat{f}(k)$ berechnen. Freundlicherweise ist f schon als trigonometrischen Reihe dargestellt, weshalb wir einfach ablesen können, dass gilt $\widehat{f}(k) = 1/(k!)$ für gerades $k \geq 0$ und $\widehat{f}(k) = 0$ sonst.

Die zusätzliche Bedingung $\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\, dt = 0$, zusammen mit der Annahme, dass wir im Folgenden die unendliche Summe aus dem Integral herausziehen dürfen ergibt:

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k 2\pi\delta_{k0} = 2\pi c_0,$$

dies bedeuted einfach $c_0 = 0$.

Damit erhalten wir $c_k = 0$ für $k \leq 0$ und für $k > 0$ die Rekursionsvorschrift

$$c_{k+1} = \frac{\widehat{f}(k) - c_k}{1 + k}.$$

Eine einfache Abschätzung zeigt, dass es eine Konstante $K > 0$ gibt, so dass $|c_n| \leq K2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daran sieht man, dass die Reihe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

gleichmäßig konvergiert und genauso die Reihe über die gliedweise differenzierten Ausdrücke. Damit dürfen wir x gleidweise differenzieren. Und die zusätzliche Annahme (Vertauschung von Summe und Integral) gilt. Nach Konstruktion ist x 2π-periodisch. x erfüllt somit alle Bedingungen.

Aufgabe 5

a) Für Funktionen $f, g \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $f + \lambda g$ wieder eine beschränkte Funktion $(-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$, die an allen Stellen Stetig ist, an denen sowohl f als auch g stetig sind. Also ist $f + \lambda g$ höchstens an den endlich vielen Stellen unstetig an denen f oder g unstetig ist. Insgesamt liegt $f + \lambda g$ in V.

b) Für Funktionen $f, g \in V$ ist $f\bar{g}$ wieder eine beschränkte Funktion $(-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$, die höchstens an den endlich vielen Stellen unstetig ist, an denen f oder g unstetig ist. Insgesammt gilt damit, dass $f\bar{g}$ über $(-\pi, \pi)$ integrierbar ist.

Weiter gilt für $f, f_1, f_2 \in V$ und für $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\langle g, f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\bar{f}(t)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\bar{g}(t)f(t)}\ dt = \overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{g}(t)\ dt} = \overline{\langle f, g \rangle},$$

$$\begin{aligned}\langle f_1 + \lambda f_2, g \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \big(f_1(t) + \lambda f_2(t)\big)\bar{g}(t)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)\bar{g}(t)\ dt + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} f_2(t)\bar{g}(t)\ dt \\ &= \langle f_1, g \rangle + \lambda \langle f_2, g \rangle\end{aligned}$$

und schließlich $\langle f, f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{f}(t)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\ dt \geq 0$. Lediglich $\langle f, f \rangle = 0$ muss nicht bedeuten, dass f die Nullfunktion ist. Allerdings kann f dann nicht ungleich Null an einer seiner Stetigkeitsstellen sein, etwa an t_0, denn mit f ist auch $|f|^2$ stetig und sonst wäre $|f(t)|^2$ auf einem Intervall größer als $\frac{|f(t_0)|^2}{2}$ und damit das Integral echt positiv.

c) Die Lösung hierfür wird in der Übung vorgerechnet.