Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. M. Muzzulini SS 2008

9. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (Ü)
Die Funktionen f, g und h sind für $(x,y) \neq (0,0)$ durch

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,, \qquad g(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}\,, \qquad h(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

gegeben, und es sei $f(0,0) := g(0,0) := h(0,0) := 0$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig.

b) Die Funktion g ist in $(0,0)$ unstetig, aber g ist im Nullpunkt „längs jeder Geraden stetig“, d. h. für jedes $\phi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r\cos\phi, r\sin\phi) \to g(0,0)$ für $r \to 0$.

c) Die Funktion h ist in $(0,0)$ unstetig, aber die folgenden Grenzwerte existieren:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} h(x,y) \qquad \text{und} \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} h(x,y)\,.$$

Aufgabe 2 (Ü)
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Für $0 \neq \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$f(\vec{x}) := \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{\|\vec{x}\|^{\alpha n}}.$$

a) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ kann f stetig im Nullpunkt fortgesetzt werden?

b) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ kann f so fortgesetzt werden, dass alle partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt existieren?

c) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ kann f so fortgesetzt werden, dass alle Richtungsableitungen von f im Nullpunkt existieren?

d) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f(\vec{0})$ so, dass alle Richtungsableitungen von f im Nullpunkt existieren. Wir setzen $\operatorname{Grad} f := \begin{pmatrix} D_1 f \\ \vdots \\ D_n f \end{pmatrix}$. Berechnen Sie für $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ die Werte $D_{\vec{v}} f(\vec{0})$ und $\vec{v} \cdot \operatorname{Grad} f(\vec{0})$.

Aufgabe 3 (Ü)
Es sei $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie:

$$\left\| \int_a^b \vec{r}(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|\vec{r}(t)\|\,dt\,.$$

Aufgabe 4 (T)
Skizzieren Sie die folgenden Kurven, und berechnen Sie deren Längen.

a) $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)\,, \quad t \in [0, 2\pi]$

b) $f(x) = |x|\,, \quad -1 \le x \le 1$

c) $z(\phi) = \phi e^{i\phi}\,, \quad \phi \in [0, 2\pi]$

d) $(x, y) = \big(\sin^3(\tfrac{1}{3}t)\cos t, \sin^3(\tfrac{1}{3}t)\sin t\big)\,, \quad 0 \le t \le 6\pi$

Bemerkung: Die erste der Kurven heißt Zykloide. Sie ensteht, wenn man einen Kreis auf einer Gerade rollt und dabei einen Punkt auf der Oberfläche betrachtet.

Aufgabe 5 (T)
Betrachten Sie in $\mathbb{R}^3$ die Menge aller Punkte, die den Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad x + z = 1$$

genügen. Geben Sie eine Parametrisierung dieser Menge an, berechnen Sie die Darstellung bezüglich der Bogenlänge, und bestimmen Sie in jedem Kurvenpunkt den Tangentenvektor und einen Normalenvektor.

Aufgabe 6 (Ü)
Betrachten Sie in $\mathbb{R}^3$ die Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{Arcsin} t \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}, \qquad -1 \le t \le 1\,.$$

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Tangente im Kurvenpunkt $\vec{x}(t_0)$ an.

b) Berechnen Sie die Länge der Kurve, und bestimmen Sie die Darstellung bezüglich der Bogenlänge.

Aufgabe 7 (T)
In $\mathbb{R}^2$ ist die Kurve γ gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t^3 - t}{t^2 + 1} \\ \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie alle Punkte mit waagerechter und alle Punkte mit senkrechter Tangente. Zeigen Sie, dass γ einen Doppelpunkt besitzt, und skizzieren Sie die Kurve. Geben Sie eine parameterfreie Darstellung der Kurve an.
Ist $\vec{x}$ injektiv?

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.