Aufgabe 1 **a)** Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist die Funktion f offensichtlich stetig. Sie ist aber auch im Punkt $(0,0)$ stetig: Es gelte $(x_n, y_n) \to (0,0)$ mit $(x_n, y_n) \neq (0,0)$. Dann gibt es $r_n > 0$ und $\varphi_n \in [0, 2\pi)$ mit $(x_n, y_n) = (r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x_n, y_n) = f(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n) &= \frac{(r_n \cos\varphi_n)(r_n \sin\varphi_n)^2}{(r_n \cos\varphi_n)^2 + (r_n \sin\varphi_n)^2} \\ &= \frac{r_n^3 \cos\varphi_n \sin^2\varphi_n}{r_n^2} = r_n \cos\varphi_n \sin^2\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \end{aligned}$$

weil $r_n \to 0$ strebt und die Folge $(\cos\varphi_n \sin^2\varphi_n)$ beschränkt ist.

b) Die Funktion g ist unstetig in $(0,0)$, denn es gilt

$$g(1/n^2, 1/n) = \frac{1/n^4}{1/n^4 + 1/n^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0)\,.$$

Wählt man jedoch ein festes φ, so ist entweder $\cos\varphi = 0$, also $g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 0$ für alle r, oder aber wir haben

$$g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^3 \cos\varphi \sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^4 \sin^4\varphi} = \frac{r\cos\varphi\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + r^2\sin^4\varphi} \xrightarrow{r\to 0} \frac{0}{\cos^2\varphi + 0} = 0\,.$$

c) Die Unstetigkeit in $(0,0)$ folgt sofort aus $h(x,x) = 1$ für $x \neq 0$, denn dies bedeutet ja $h(x,x) \to 1$ für $x \to 0$. Nun sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Im Falle $x = 0$ gilt $h(x,y) = 0$ für alle y, also $\lim_{y\to 0} h(x,y) = 0$. Aber auch im Falle $x \neq 0$ ergibt sich

$$h(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = \frac{y^2}{y^2 + (1 - y/x)^2} \xrightarrow{y\to 0} \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

Folglich existiert $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} h(x,y) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$. Wegen $h(x,y) = h(y,x)$ existiert auch der andere iterierte Limes und hat den gleichen Wert.

Aufgabe 2 Für $\vec{x} := \vec{e}_1$ Erhalten wir $0 = f(\vec{x}) = f(\frac{1}{m}\vec{x})$.
Damit gilt $\frac{1}{m}\vec{x} \to \vec{0}$ und $f(\frac{1}{m}\vec{x}) = 0 \to 0$ $(m \to \infty)$. Daher muss, unabhängig von α, $f(\vec{0}) = 0$ gewählt werden, wenn wir f stetig fortstetzen wollen. Auch können sonst keine partiellen Ableitungen oder gar Richtungsableitungen in $\vec{0}$ existieren. Sei also $f(\vec{0}) := 0$.

a) Wir betrachten zunächst alle Werte $\alpha \geqslant 1$ und setzen dafür

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für große m, so dass $\|\frac{1}{m}\vec{x}\| \leqslant 1$ gilt die Abschätzung

$$\|\frac{1}{m}\vec{x}\|^{\alpha n} \leqslant \|\frac{1}{m}\vec{x}\|^n = \|\vec{x}\|^n m^{-n}.$$

Damit erhalten wir

$$f\Big(\frac{1}{m}\vec{x}\Big) = \frac{\frac{1}{m}\frac{1}{m}\cdots\frac{1}{m}}{\|\frac{1}{m}\vec{x}\|^{\alpha n}} = \frac{m^{-n}}{\|\frac{1}{m}\vec{x}\|^{\alpha n}} \geqslant \frac{m^{-n}}{\|\vec{x}\|^n m^{-n}} = \frac{1}{\|\vec{x}\|^n}(= n^{-n/2}) > 0.$$

Damit konvergiert $f(\frac{1}{m}\vec{x})$ nicht gegen 0, aber $\frac{1}{m}\vec{x} \to \vec{0}$. Folglich ist f nicht stetig.

Nun sei $\alpha < 1$. Wir zeigen, dass f stetig ist im Nullpunkt. Wir müssen für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ finden, so dass für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta$ gilt $|f(\vec{x}) - f(\vec{0})| = |f(\vec{x})| \leqslant \varepsilon$. Sei also $\varepsilon > 0$.

Wir setzten $\nu := 1 - \alpha > 0$ und $\delta := \varepsilon^{\frac{1}{\nu n}} > 0$. Sei nun also $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{x}\| < \delta$. Wir können wie folgt abschätzen:

$$|f(\vec{x})| \leqslant \frac{\|\vec{x}\|\|\vec{x}\|\cdots\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|^{(1-\nu)n}} = \frac{\|\vec{x}\|^n}{\|\vec{x}\|^n}\|\vec{x}\|^{\nu n} = \|\vec{x}\|^{\nu n} \leqslant \delta^{\nu n} = \varepsilon.$$

f ist also stetig.

b) Unabhängig von α ergibt die Definition von f, dass gilt $f(\vec{0} + h\vec{e_j}) = f(h\vec{e_j}) = 0 = f(\vec{0})$ für jedes $h \in \mathbb{R}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$. Damit gilt $f(\vec{0} + h\vec{e_j}) - f(\vec{0}) = 0$ und inbesondere

$$D_j f(\vec{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(\vec{0} + h\vec{e_j}) - f(\vec{0})) = 0.$$

Alle partiellen Ableitungen existieren.

c) Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ eine Richtung. Dass die Richtungsableitung $D_{\vec{v}} f(\vec{0})$ existiert muss folgender Grenzwert existieren:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(\vec{0} + h\vec{v}) - f(\vec{0})) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(h\vec{v})) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{hv_1 hv_2\cdots hv_n}{\|h\vec{v}\|^{\alpha n}} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^n}{hh^{\alpha n}}\frac{v_1 v_2\cdots v_n}{\|\vec{v}\|^{\alpha n}} = \lim_{h\to 0} h^{n-1-\alpha n} f(\vec{v}).\end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert genau dann, wenn $n - 1 - \alpha n \geqslant 0$, also für $\alpha \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

d) Aus Teil **c)** sehen wir $D_{\vec{v}} f(\vec{0}) = \lim_{h\to 0} h^{n-1-\alpha n} f(\vec{v})$. Für $\alpha < 1 - \frac{1}{n}$ ist der Grenzwert Null, für $\alpha = 1 - \frac{1}{n}$ ist der Grenzwert $f(\vec{v})$, was ungleich Null sein kann.
Jedoch ist $\operatorname{Grad} f(\vec{0})$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ in jeder Komponente Null (siehe **b)**). Damit gilt insbesondere $\vec{v} \cdot \operatorname{Grad} f(\vec{0}) = 0$ für jedes $\alpha \leqslant 1 - \frac{1}{n}$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. (In der Vorlesung wird Differenzierbarkeit von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert. Für $\alpha = 1 - \frac{1}{n}$ kann man schließen, dass f nicht Differenzierbar ist, denn sonst müßten für jedes $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ beide Terme übereinstimmen.

Aufgabe 3 Wir setzen

$$\vec{u} := \int_a^b \vec{r}(t)\,dt\,.$$

Dann ist entweder $\vec{u} = \vec{0}$ und damit die behauptete Ungleichung trivial (weil auf der linken Seite 0 steht), oder aber wir können $\vec{v} := \vec{u}/\|\vec{u}\|$ definieren und haben

$$\left\| \int_a^b \vec{r}(t)\,dt \right\| = \|\vec{u}\| = \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \vec{u}\cdot\vec{v} = \left(\int_a^b \vec{r}(t)\,dt\right)\cdot\vec{v} = \int_a^b \vec{r}(t)\cdot\vec{v}\,dt\,.$$

(Dass man das Innenprodukt „in das Integral hineinziehen“ kann, ergibt sich aus der komponentenweisen Definition des Integrals.)

Wegen $\vec{r}(t)\cdot\vec{v} \leqslant |\vec{r}(t)\cdot\vec{v}\,| \leqslant \|\vec{r}(t)\|\cdot\|\vec{v}\| = \|\vec{r}(t)\|$ folgt dann

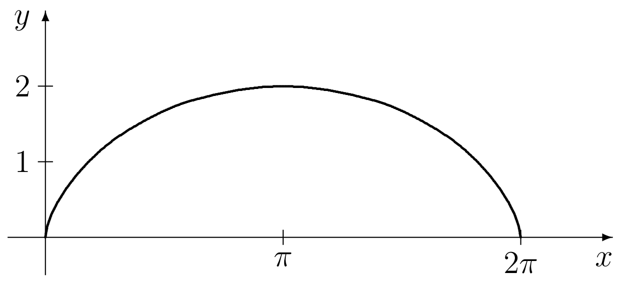
$$\left\| \int_a^b \vec{r}(t)\,dt \right\| = \int_a^b \vec{r}(t)\cdot\vec{v}\,dt \leqslant \int_a^b \|\vec{r}(t)\|\,dt\,.$$

Aufgabe 4 **a)** Es gilt $\vec{r}\,'(t) = (1-\cos t, \sin t)$ und damit

$$\begin{aligned}\|\vec{r}\,'(t)\|^2 &= (1-\cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2\cos t\\ &= 2\big(1-\cos(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{2}t)\big) = 2\big(1-\cos^2(\tfrac{1}{2}t)+\sin^2(\tfrac{1}{2}t)\big) = 4\sin^2(\tfrac{1}{2}t)\,.\end{aligned}$$

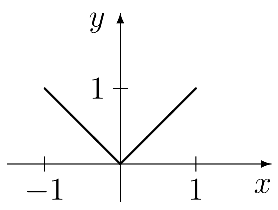
Definitionsgemäß ist also

$$L(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} 2|\sin(\tfrac{1}{2}t)|\,dt = 2\int_0^{2\pi} \sin(\tfrac{1}{2}t)\,dt = -4\cos(\tfrac{1}{2}t)\Big|_{t=0}^{2\pi} = 8\,.$$



b) Hier geht es um die Kurve $\vec{r}(t) = (t, f(t)) = (t, |t|)$, $t \in [-1,1]$. Deren Länge ist

$$L(\vec{r}\,) = \int_{-1}^{1} \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_{-1}^{0} \|(1,-1)\|\,dt + \int_0^1 \|(1,1)\|\,dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{2}\,dt = 2\sqrt{2}\,.$$



c) Mit dieser Schreibweise ist die Kurve $\vec{r}(\varphi) = (\varphi\cos\varphi, \varphi\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, gemeint. Wegen $\vec{r}\,'(t) = (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi, \sin\varphi + \varphi\cos\varphi)$ ergibt sich

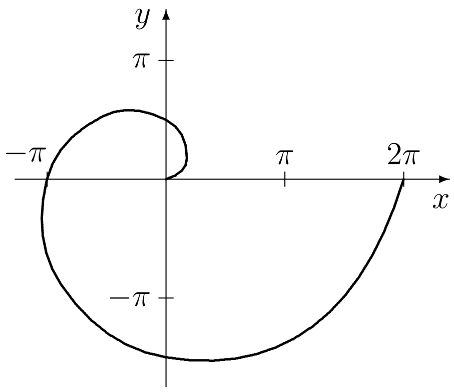
$$\begin{aligned}\|\vec{r}\,'(\varphi)\|^2 &= (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)^2 + (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)^2\\ &= \cos^2\varphi - 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\sin^2\varphi + \sin^2\varphi + 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\cos^2\varphi\\ &= 1 + \varphi^2\,,\end{aligned}$$

und damit

$$L(\vec{r}\,) = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}\,'(\varphi)\|\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+\varphi^2}+\sqrt{1+\varphi^2}}{2}\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2}\right)d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh}\varphi + \varphi\sqrt{1+\varphi^2}\right)\Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{\operatorname{arsinh}2\pi}{2} + \pi\sqrt{1+4\pi^2}\,.$$



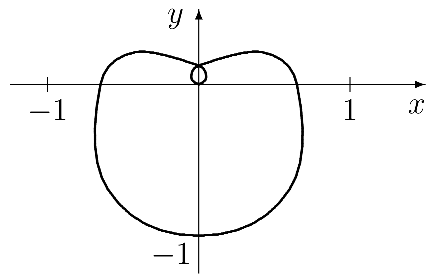
d) Hier ergibt sich

$$\begin{aligned}x'(t) &= 3\sin^2(\tfrac{1}{3}t)\cos(\tfrac{1}{3}t)\tfrac{1}{3}\cos t - \sin^3(\tfrac{1}{3}t)\sin t\\ &= \sin^2(\tfrac{1}{3}t)(\cos(\tfrac{1}{3}t)\cos t - \sin(\tfrac{1}{3}t)\sin(t)) = \sin^2(\tfrac{1}{3}t)\cos(\tfrac{4}{3}t)\,,\end{aligned}$$

und genauso $y'(t) = \sin^2(\frac{1}{3}t)\sin(\frac{4}{3}t)$. Folglich ist die Länge der Kurve

$$\int_0^{6\pi}\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \int_0^{6\pi}\sqrt{\sin^4(\tfrac{1}{3}t)\cos^2(\tfrac{4}{3}t) + \sin^4(\tfrac{1}{3}t)\sin^2(\tfrac{4}{3}t)}\,dt$$

$$= \int_0^{6\pi}\sin^2(\tfrac{1}{3}t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^{6\pi}\sin^2(\tfrac{1}{3}t)\,dt + \int_0^{6\pi}\cos^2(\tfrac{1}{3}t)\,dt\right) = \frac{6\pi}{2} = 3\pi\,.$$



(Die Kurve wird bei der gegebenen Parametrisierung zweimal durchlaufen, und zwar entgegen dem Uhrzeigersinn.)

Aufgabe 5 Es handelt sich um den Schnitt einer Kugel mit einer Ebene; dies ist ein Kreis. Setzen wir $z = 1 - x$ in die Kugelgleichung ein, so erhalten wir

$$x^2 + y^2 + (1-x)^2 = 1\,, \quad \text{also} \quad 2x^2 - 2x + y^2 = 0$$

Wir dividieren durch 2 und nehmen eine quadratische Ergänzung vor:

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,y)^2 = 0\,.$$

Bei dieser Kreisgleichung parametrisieren wir nun wie folgt:

$$x - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\cos t, \qquad \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,y = \tfrac{1}{2}\sin t \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Dann haben wir $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t$ und es folgt $z = 1 - x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t$. Also:

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ \sqrt{2}\,\sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi]\,.$$

Der Tangentenvektor im Punkt $\vec{x}(t)$ ist

$$\vec{x}\,'(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \sqrt{2}\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Ein Normalenvektor hierzu ist beispielsweise $\vec{n} := (1, 0, 1)$.

Nun berechnen wir noch

$$s(t) := L_0^t(\vec{x}\,) = \int_0^t \|\vec{x}\,'(\tau)\|\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \sqrt{\sin^2\tau + 2\cos^2\tau + \sin^2\tau}\,d\tau = t/\sqrt{2}\,.$$

Die Darstellung bezüglich der Bogenlänge ist dann wegen $t = \sqrt{2}\,s$ gegeben durch

$$\vec{x}(s) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \cos(\sqrt{2}\,s) \\ \sqrt{2}\,\sin(\sqrt{2}\,s) \\ 1 - \cos(\sqrt{2}\,s) \end{pmatrix}, \qquad s \in [0, \sqrt{2}\,\pi]\,.$$

Aufgabe 6 **a)** Für $-1 < t < 1$ gilt

$$\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t^2} \\ 1 \\ -t/\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

Für $t_0 \in (-1, 1)$ ist daher

$$\vec{x}(t_0) + \lambda\vec{x}\,'(t_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Arcsin} t_0 \\ t_0 \\ \sqrt{1-t_0^2} \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t_0^2} \\ 1 \\ -t_0/\sqrt{1-t_0^2} \end{pmatrix}$$

eine Parameterdarstellung der Tangente im Punkt $\vec{x}(t_0)$. Für $t_0 = \pm 1$ ist dieser Ausdruck jedoch nicht definiert. Wir bilden daher noch

$$\|\vec{x}\,'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{1-t^2} + 1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \sqrt{\frac{2}{1-t^2}}\,,$$

und betrachten

$$\frac{\vec{x}\,'(t)}{\|\vec{x}\,'(t)\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{1-t^2}/\sqrt{2} \\ -t/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Hier können wir $t = \pm 1$ einsetzen (genauer: den Grenzübergang $t \to \pm 1$ machen) und erhalten die Tangentenvektoren $(1/\sqrt{2}, 0, \mp 1/\sqrt{2})$. In den Punkten $\vec{x}(-1) = (-\frac{\pi}{2}, -1, 0)$ und $\vec{x}(1) = (\frac{\pi}{2}, 1, 0)$ ergeben sich also die Tangenten

$$\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Wir haben

$$s(t) := \int_{-1}^{t} \|\vec{x}\,'(\tau)\|\, d\tau = \int_{-1}^{t} \sqrt{\frac{2}{1-\tau^2}}\, d\tau = \sqrt{2}\,\operatorname{Arcsin}\tau\Big|_{\tau=-1}^{t} = \sqrt{2}\,(\operatorname{Arcsin} t + \tfrac{\pi}{2})\,.$$

Folglich hat die Kurve die Länge $s(1) = \sqrt{2}\,\pi$ und wegen

$$\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} = \operatorname{Arcsin} t, \qquad \text{also} \qquad t = t(s) = \sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \tfrac{\pi}{2}) = -\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,s)$$

ist die Darstellung bezüglich der Bogenlänge

$$\vec{x}(s) = \vec{x}(t(s)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{2} \\ -\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s) \\ \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s) \end{pmatrix}, \qquad s \in [0, \sqrt{2}\,\pi]\,.$$

Aufgabe 7 Es gilt $\vec{x}(t) = (tf(t), f(t))$ für $f(t) := (t^2-1)/(t^2+1)$. Wegen

$$f'(t) = \frac{2t(t^2+1) - (t^2-1)2t}{(t^2+1)^2} = \frac{4t}{(t^2+1)^2}$$

folgt dann

$$\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} f(t) + tf'(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{t^2-1}{t^2+1} + \dfrac{4t^2}{(t^2+1)^2} \\ \dfrac{4t}{(t^2+1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{t^4+4t^2-1}{(t^2+1)^2} \\ \dfrac{4t}{(t^2+1)^2} \end{pmatrix}.$$

Eine waagerechte Tangente liegt genau dann vor, wenn die zweite Komponente dieses Vektors 0 wird, d. h. wenn $t = 0$ gilt. Dies liefert den Punkt $P_1 = (0, -1)$.

Für Punkte mit senkrechter Tangente muss die erste Komponente des obigen Vektors verschwinden. Für $u := t^2$ bedeutet dies

$$u^2 + 4u - 1 = 0, \qquad \text{also} \qquad u_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+1}\,.$$

Da $u = t^2 < 0$ nicht möglich ist, haben wir zwei Lösungen $t_{1,2} = \pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}$. Berechnen wir die Punkte: Es gilt

$$f(t_{1,2}) = \frac{-2+\sqrt{5}-1}{-2+\sqrt{5}+1} = \frac{-3+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}} = \frac{(-3+\sqrt{5}\,)(1+\sqrt{5}\,)}{5-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

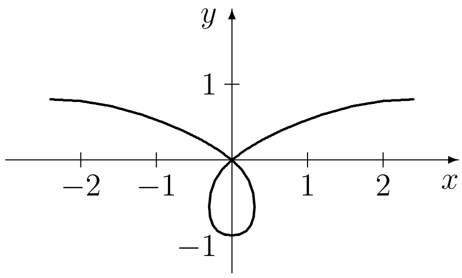
Weiter hat man

$$\begin{aligned} t_{1,2} f(t_{1,2}) &= \pm\sqrt{-2+\sqrt{5}} \cdot \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}\,) = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(-2+\sqrt{5}\,)(1-\sqrt{5}\,)^2} \\ &= \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(-2+\sqrt{5}\,)(6-2\sqrt{5}\,)} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-22+10\sqrt{5}}\,. \end{aligned}$$

In folgenden Punkten liegt also eine senkrechte Tangente vor:

$$P_2 = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22},\ \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}\,)\right), \qquad P_3 = \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22},\ \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}\,)\right).$$

Die Kurve besitzt einen Doppelpunkt, denn sowohl $t = -1$ als auch $t = 1$ liefert den Punkt $P_4 = (0,0)$.



Eine parameterfreie Darstellung erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned} (x,y) = \vec{x}(t) \quad \text{für ein } t \in \mathbb{R} \quad &\leftrightarrow \quad x = ty \quad \text{und} \quad y = \frac{t^2-1}{t^2+1} \quad \text{für ein } t \in \mathbb{R} \\ &\leftrightarrow \quad x = y = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{(x/y)^2-1}{(x/y)^2+1} \quad \leftrightarrow \quad x = y = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \\ &\leftrightarrow \quad y(x^2+y^2) = x^2 - y^2\,. \end{aligned}$$

Injektivität bedeutet $t_1 \neq t_2 \rightarrow \vec{x}(t_1) \neq \vec{x}(t_2)$. Wir haben aber schon gezeigt, dass $\vec{x}$ einen Doppelpunkt hat. Das genau bedeutet aber, dass $\vec{x}$ nicht injektiv ist.