Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. M. Muzzulini

SS 2008

10. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (T)
Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

a) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$

b) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{xy}$

c) $f(x,y,z) = xe^y/z \quad (z \neq 0)$

Aufgabe 2 (Ü)
Berechnen Sie jeweils die Jakobimatrix.

a) $\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2z^3e^{xy^2z^3} \\ x^2e^y + \sin x \end{pmatrix}$

b) $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x + x\sinh y \\ y^4 + 3x^2\sin y \\ 4y - x^3 \end{pmatrix}$

c) $f(x,y,z) = \arctan(xy) + e^z\cosh(x+y)$

d) $f(x,y,z) = x^y$

Aufgabe 3 (Ü)
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0\,, & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Berechnen Sie $\nabla f(x,y)$ für alle Punkte (x,y), in denen das möglich ist.

c) Berechnen Sie $D_1D_2f(0,0)$ und $D_2D_1f(0,0)$.

d) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort die Ableitung.

e) Ist f zweimal stetig differenzierbar?

Aufgabe 4 (T)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2y}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0\,, & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Überprüfen Sie, ob f stetig ist.

b) Berechnen Sie in jedem Punkt den Gradienten von f.

c) Sind $D_1 f$ und $D_2 f$ in $(0,0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $D_{\vec{v}} f(0,0)$ für jede Richtung $\vec{v}$, für die das möglich ist. Für welche $\vec{v}$ gilt $D_{\vec{v}} f(0,0) = \operatorname{grad} f(0,0) \cdot \vec{v}$?

e) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort die Ableitung.

Aufgabe 5 (T)
Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\vec{\phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ seien partiell differenzierbar. Rechnen Sie nach:

a)

$$\nabla(fg) = g(\nabla f) + f(\nabla g)$$

b)

$$\nabla \times (f\vec{\phi}) = f(\nabla \times \vec{\phi}) + (\nabla f) \times \vec{\phi} \qquad \text{(für } n = 3\text{)}$$

c)

$$\nabla \cdot (f\vec{\phi}) = f(\nabla \cdot \vec{\phi}) + (\nabla f) \cdot \vec{\phi}$$

d) Bestimmen Sie die Rotation und die Divergenz von

$$\vec{g}(x,y,z) := \frac{x^2+y^2+z^2-2}{(x^2+y^2+z^2)^2}(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)\,.$$

Aufgabe 6 (Ü)
Sind die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar, so gilt

$$\Delta(fg) = g\Delta f + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g) + f\Delta g\,.$$

Aufgabe 7 (Ü)
Sei $\vec{f}(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$.
Was macht $\vec{f}$ geometrisch?
Berechnen Sie die Funktionaldeterminaten $\det J_{\vec{f}}$.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

Termin für die zweite Übungsklausur HM II Sommer 2008 :
Samstag, 05.7.2008, 09.00-11.00 Uhr

Für die **Physiker** werden vom Montag, 23.6. bis Dienstag, 1.7. Listen aushängen in denen Sie sich eintragen können, um sich für die erste Übungsklausur anzumelden.

Alle **E-Techniker** und **Geodäten** schreiben die zweite Übungsklausur im **HMO**. Eine Anmeldung hierfür ist **nicht** nötig.