Aufgabe 1 **a)** Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$D_1 f(x,y) = 3x^2 - 4xy^2 + 4y^3 \qquad \text{und} \qquad D_2 f(x,y) = -4x^2y + 12xy^2 + 4y^3\,.$$

Daraus ergibt sich für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} D_1D_1 f(x,y) &= 6x - 4y^2\,, & D_2D_2 f(x,y) &= -4x^2 + 24xy + 12y^2\,,\\ D_1D_2 f(x,y) &= -8xy + 12y^2\,, & D_2D_1 f(x,y) &= -8xy + 12y^2\,. \end{aligned}$$

Dass $D_1D_2 f = D_2D_1 f$ gilt, war wegen des Satzes von Schwarz schon vorher klar, denn die Funktion f ist offenbar zweimal stetig differenzierbar.

b) Hier haben wir

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2xe^{xy} + (x^2+y^2)ye^{xy} = (x^2y + 2x + y^3)e^{xy}\,,\\ D_2 f(x,y) &= 2ye^{xy} + (x^2+y^2)xe^{xy} = (x^3 + xy^2 + 2y)e^{xy}\,. \end{aligned}$$

Weiter gilt dann

$$\begin{aligned} D_1D_1 f(x,y) &= (2xy+2)e^{xy} + (x^2y + y^3 + 2x)ye^{xy} = (x^2y^2 + 4xy + y^4 + 2)e^{xy}\,,\\ D_2D_2 f(x,y) &= (2xy+2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)xe^{xy} = (x^4 + x^2y^2 + 4xy + 2)e^{xy}\,,\\ D_1D_2 f(x,y) &= (3x^2+y^2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)ye^{xy} = (x^3y + 3x^2 + xy^3 + 3y^2)e^{xy}\\ &= D_2D_1 f(x,y)\,. \end{aligned}$$

c) Es ergibt sich

$$D_1 f(x,y,z) = e^y/z\,, \qquad D_2 f(x,y,z) = xe^y/z\,, \qquad D_3 f(x,y,z) = -xe^y/z^2\,.$$

Weiter haben wir

$$D_1D_1 f(x,y,z) = 0\,, \qquad D_2D_2 f(x,y,z) = xe^y/z\,, \qquad D_3D_3 f(x,y,z) = 2xe^y/z^3\,.$$

Und schließlich noch die gemischten Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} D_1D_2 f(x,y,z) &= e^y/z = D_2D_1 f(x,y,z)\,,\\ D_1D_3 f(x,y,z) &= -e^y/z^2 = D_3D_1 f(x,y,z)\,,\\ D_2D_3 f(x,y,z) &= -xe^y/z^2 = D_3D_2 f(x,y,z)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 **a)** $D_1 f_1(x,y,z) = y^2z^3e^{xy^2z^3} + xy^2z^3e^{xy^2z^3}y^2z^3 = y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3}$; ebenso berechnet man die anderen Ableitungen. Die Jakobimatrix ist gegeben durch

$$\begin{aligned} J_{\vec f}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} D_1f_1 & D_2f_1 & D_3f_1\\ D_1f_2 & D_2f_2 & D_3f_2 \end{pmatrix}(x,y,z)\\ &= \begin{pmatrix} y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3}\\ 2xe^y + \cos x & x^2e^y & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Diesmal haben wir $J_{\vec{f}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^x + \sinh y & e^x + x\cosh y \\ 6x\sin y & 4y^3 + 3x^2\cos y \\ -3x^2 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Und hier erhalten wir die $(1,3)$-Matrix

$$J_f(x,y,z) = \left(\frac{y}{1+(xy)^2} + e^z \sinh(x+y) \quad \frac{x}{1+(xy)^2} + e^z \sinh(x+y) \quad e^z \cosh(xy) \right).$$

d) Wegen $x^y = e^{y\ln x}$ ergibt sich $D_1 f(x,y,z) = e^{y\ln x} y/x$ und $D_2 f(x,y,z) = e^{y\ln x}\ln x$. Folglich ist

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 **a)** Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f offenbar stetig; wir müssen also nur noch die Stetigkeit in $(0,0)$ nachweisen: Wegen

$$\left| \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| = \frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \le \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

gilt $|f(x,y)| \le |xy|$ und damit folgt $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\,\frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{y(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}\,, \end{aligned}$$

und wegen $f(x,y) = -f(y,x)$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} D_2 f(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-f(y+h,x) + f(y,x)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{f(y+h,x) - f(y,x)}{h} = -D_1 f(y,x) = -\frac{y^4x + 4y^2x^3 - x^5}{(y^2+x^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt also

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} D_1 f(x,y) \\ D_2 f(x,y) \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4y + 4x^2y^3 - y^5 \\ x^5 - 4x^3y^2 - xy^4 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun noch den Nullpunkt: Es ist

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,,$$

und genauso

$$D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0\,.$$

Somit ist $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

c) Definitionsgemäß gilt

$$D_1 D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2 f(h,0) - D_2 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{D_2 f(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^5 - 0 - 0}{(h^2+0)^2} = 1\,.$$

Ebenso erhält man

$$D_2 D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_1 f(0,h) - D_1 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{D_1 f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 + 0 - h^5}{h(0+h^2)^2} = -1\,.$$

d) Wie wir wissen, gilt

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4 y + 4x^2y^3 - y^5 \\ x^5 - 4x^3y^2 - xy^4 \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dort existieren also die partiellen Ableitungen erster Ordnung und sind stetig, d. h. f ist dort stetig differenzierbar. Aus der Vorlesung wissen wir, dass dies die Differenzierbarkeit impliziert. Die Ableitung ist

$$f'(x,y) = J_f(x,y) = \big(\nabla f(x,y)\big)^T = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4y + 4x^2y^3 - y^5 & x^5 - 4x^3y^2 - xy^4 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist bekannt: $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ sei $z := \max\{|x|,|y|\}$. Es gilt

$$|D_1 f(x,y)| = \frac{|x^4y + 4x^2y^3 - y^5|}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{z^5 + 4z^5 + z^5}{(z^2)^2} = 6z = 6\max\{|x|,|y|\}\,.$$

Damit folgt $D_1 f(x,y) \to 0 = D_1 f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$. Genauso sieht man ein, dass $D_2 f$ in $(0,0)$ stetig ist. Also ist f in $(0,0)$ stetig differenzierbar und damit differenzierbar, und es gilt $f'(0,0) = (0\ 0)$.

e) Die Funktion f kann nicht zweimal stetig differenzierbar sei, denn sonst müssten diese beiden Ableitungen D_2D_1f und D_1D_2f übereinstimmen (Satz von Schwarz).

Aufgabe 4 **a)** Diese Funktion ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ offenbar stetig; es bleibt noch der Nullpunkt zu prüfen. Ist $(x,y) \neq (0,0)$ und $z := \max\{|x|,|y|\}$, so gilt

$$|f(x,y)| = \left|\frac{y^3 - x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|y^3| + |x^2y|}{x^2+y^2} \leq \frac{z^3+z^3}{z^2} = 2z = 2\max\{|x|,|y|\}\,,$$

und damit folgt $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$D_1 f(x,y) = \frac{-2xy(x^2+y^2) - (y^3 - x^2y)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy^3}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

$$D_2 f(x,y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2) - (y^3 - x^2y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^4 + 4x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ haben wir also

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} -4xy^3 \\ -x^4+4x^2y^2+y^4 \end{pmatrix}$$

Nun noch zum Nullpunkt: Definitionsgemäß gilt

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

und

$$D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^3-0}{0+h^2} = 1\,.$$

Somit ist f auch in $(0,0)$ partiell differenzierbar mit

$$\operatorname{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Betrachtet man

$$\begin{aligned} D_1 f(x,x) &= \frac{-4x^4}{(x^2+x^2)^2} = -1 \xrightarrow{x\to 0} -1 \neq 0 = D_1 f(0,0)\,, \\ D_2 f(x,0) &= \frac{-x^4+0+0}{(x^2+0)^2} = -1 \xrightarrow{x\to 0} -1 \neq 1 = D_2 f(0,0)\,, \end{aligned}$$

so sieht man: Weder $D_1 f$ noch $D_2 f$ ist im Punkt $(0,0)$ stetig.

d) Es sei $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq (0,0)$ eine beliebige Richtung. Dann gilt

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\vec{v}\,)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(hv_2)^3-(hv_1)^2hv_2}{(hv_1)^2+(hv_2)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3v_2^3-h^3v_1^2v_2}{h^3(v_1^2+v_2^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{v_2^3-v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2} = \frac{v_2^3-v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2}\,. \end{aligned}$$

Dies soll nun mit

$$\operatorname{grad} f(0,0) \cdot \vec{v} = v_2$$

verglichen werden. Es gilt

$$\frac{v_2^3-v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2} = v_2 \iff v_2^3-v_1^2v_2 = v_2(v_1^2+v_2^2) \iff 2v_1^2v_2 = 0\,.$$

Gleichheit gilt also genau dann, wenn $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ ist.

e) Nicht für alle Richtungen $\vec{v}$ gilt die Gleichung $D_{\vec{v}} f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v}$. Folglich kann die Funktion in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein (denn sonst müsste ja laut Vorlesung die Gleichung für alle Richtungen gelten). Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist sie aber stetig differenzierbar, also auch differenzierbar, mit

$$f'(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} -4xy^3 & -x^4+4x^2y^2+y^4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

a)

$$\nabla(fg) = \begin{pmatrix} D_1(fg) \\ \vdots \\ D_n(fg) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (D_1 f)g + f(D_1 g) \\ \vdots \\ (D_n f)g + f(D_n g) \end{pmatrix} = g(\nabla f) + f(\nabla g)$$

b)

$$\begin{aligned}
\nabla \times (f\vec{\phi}\,) &= \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f\phi_1 \\ f\phi_2 \\ f\phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_2(f\phi_3) - D_3(f\phi_2) \\ D_3(f\phi_1) - D_1(f\phi_3) \\ D_1(f\phi_2) - D_2(f\phi_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (D_2 f)\phi_3 + f(D_2\phi_3) - (D_3 f)\phi_2 - f(D_3\phi_2) \\ (D_3 f)\phi_1 + f(D_3\phi_1) - (D_1 f)\phi_3 - f(D_1\phi_3) \\ (D_1 f)\phi_2 + f(D_1\phi_2) - (D_2 f)\phi_1 - f(D_2\phi_1) \end{pmatrix} \\
&= f\begin{pmatrix} D_2\phi_3 - D_3\phi_2 \\ D_3\phi_1 - D_1\phi_3 \\ D_1\phi_2 - D_2\phi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (D_2 f)\phi_3 - (D_3 f)\phi_2 \\ (D_3 f)\phi_1 - (D_1 f)\phi_3 \\ (D_1 f)\phi_2 - (D_2 f)\phi_1 \end{pmatrix} = f(\nabla \times \vec{\phi}\,) + (\nabla f) \times \vec{\phi}\,,
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (f\vec{\phi}\,) &= \begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f\phi_1 \\ \vdots \\ f\phi_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} D_k(f\phi_k) = \sum_{k=1}^{n} (D_k f)\phi_k + f(D_k\phi_k) \\
&= f\sum_{k=1}^{n} D_k\phi_k + \sum_{k=1}^{n} (D_k f)\phi_k = f(\nabla \cdot \vec{\phi}\,) + (\nabla f) \cdot \vec{\phi}\,.
\end{aligned}$$

d) Wegen $\vec{g} = f\vec{\phi}$ mit

$$f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2-2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} - \frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,, \qquad \vec{\phi}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

erhalten wir $\operatorname{rot}\vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \nabla \times (f\vec{\phi}\,) = f(\nabla \times \vec{\phi}\,) + (\nabla f) \times \vec{\phi}$.
Offenbar ist $\nabla \times \vec{\phi} = \vec{0}$ und $D_1 f(x,y,z) = -2x(x^2+y^2+z^2)^{-2} + 8x(x^2+y^2+z^2)^{-3}$; die anderen Ableitungen berechnet man genauso und erhält

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{8-2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad (\nabla f) \times \vec{\phi} = \vec{0}\,.$$

Folglich ist $\operatorname{rot}\vec{g} = \vec{0}$. Für die Divergenz ergibt sich

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{g} &= \nabla \cdot \vec{g} = \nabla \cdot (f\vec{\phi}\,) = f(\nabla \cdot \vec{\phi}\,) + (\nabla f) \cdot \vec{\phi} \\
&= 3f + \frac{8-2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}(x^2+y^2+z^2) = \frac{x^2+y^2+z^2+2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 Wir verwenden die Darstellung $\Delta = \nabla^T \nabla = \nabla \cdot \nabla$ des Laplaceoperators. Aus $D_k(fg) = (D_k f)g + f(D_k g)$ folgt $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$. Damit ergibt sich

$$\Delta(fg) = \nabla \cdot \big(\nabla(fg)\big) = \nabla \cdot \big((\nabla f)g + f(\nabla g)\big) = \nabla \cdot \big(g(\nabla f)\big) + \nabla \cdot \big(f(\nabla g)\big)\,;$$

auf beide Summanden wenden wir nun die Formel aus Aufgabe 7 an (Beachte: f und g sind skalarwertig, ∇f und ∇g sind vektorwertig) und erhalten

$$\begin{aligned} &= g\big(\nabla \cdot (\nabla f)\big) + (\nabla g) \cdot (\nabla f) + f\big(\nabla \cdot (\nabla g)\big) + (\nabla f) \cdot (\nabla g) \\ &= g\Delta f + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g) + f\Delta g\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 7 $\vec{f}$ bildet die Zylinderkoordinaten r, ϕ, z eines Punktes das $\mathbb{R}^3$ auf dessen Standardkooridinaten ab.

Zunächst berechnen wir die Jakobimatrix:

$$J_{\vec{f}} = \vec{f}' = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 & D_3 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 & D_3 f_2 \\ D_1 f_3 & D_2 f_3 & D_3 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & +r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $\det J_{\vec{f}} = 1 \det \left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{smallmatrix}\right) = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$.