Aufgabe 1 Wir betrachten zunächst den Schnitt von T mit einer Ebene der Form $z = c$. Wegen $b \sin u \in [-b, b]$ ergibt sich für $|c| > b$ die leere Menge. Für $c = \pm b$ ergibt sich genau ein u mit $b \sin u = c$, nämlich $u = \frac{\pi}{2}$ bzw. $u = \frac{3\pi}{2}$. Dann ist $\cos u = 0$ und an den beiden ersten Komponenten von $\vec{r}$ lesen wir ab: Der Schnitt ist ein Kreis um den Ursprung mit Radius a. Für $c \in (-b, b)$ existieren zwei Zahlen u_1 und u_2 mit $u_j \in [0, 2\pi)$ und $c = b \sin u_j$. Als Schnitt ergeben sich hier jeweils zwei konzentrische Kreise um den Ursprung.

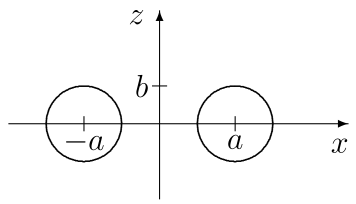
Nun schneiden wir die Menge T mit der xz-Ebene, setzen also $y = 0$. Dann folgt

$$(a + b \cos u) \sin v = 0\,;$$

wegen $a > b > 0$ bedeutet dies $\sin v = 0$, d. h. $v = 0$ oder $v = \pi$. Wegen

$$\vec{r}(u, 0) = \begin{pmatrix} a + b \cos u \\ 0 \\ b \sin u \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}(u, \pi) = \begin{pmatrix} -(a + b \cos u) \\ 0 \\ b \sin u \end{pmatrix}$$

ergibt sich folgendes Bild:



Damit ist klar wie T aussieht: Die Menge entsteht, indem man die Kreise in der Skizze um die z-Achse rotieren lässt. (Man nennt T einen *Torus*.)

Jetzt wenden wir uns den Tangentialebenen zu. Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Tangentialebene im Punkt $\vec{r}(u, v)$ aufgespannt wird von den Vektoren

$$D_1\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} -b \sin u \cos v \\ -b \sin u \sin v \\ b \cos u \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D_2\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} -(a + b \cos u) \sin v \\ (a + b \cos u) \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Normalenvektor dieser Tangentialebene ist dann

$$D_1\vec{r}(u, v) \times D_2\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} -b \cos u (a + b \cos u) \cos v \\ -b \cos u (a + b \cos u) \sin v \\ -b \sin u (a + b \cos u) \end{pmatrix}.$$

Die Tangentialebene ist genau dann senkrecht zur xy-Ebene, wenn dieser Normalenvektor in der xy-Ebene liegt, wenn er also die z-Komponente 0 hat. Dies bedeutet $\sin u = 0$, also $u = 0$ oder $u = \pi$. Wegen

$$\vec{r}(0, v) = \begin{pmatrix} (a + b) \cos v \\ (a + b) \sin v \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}(\pi, v) = \begin{pmatrix} (a - b) \cos v \\ (a - b) \sin v \\ 0 \end{pmatrix},$$

sind dies gerade zwei Kreise um den Ursprung mit den Radien $a \pm b$ in der xy-Ebene.

Orthogonalität zur xz-Ebene liegt vor, wenn die y-Komponente des Normalenvektors verschwindet, wenn also $\cos u \sin v = 0$ ist. Dies ist zum einen für $\sin v = 0$ der Fall (das ist der von oben bekannte Schnitt mit der xz-Ebene) und zum anderen für $\cos u = 0$. Letzteres bedeutet $u = \frac{\pi}{2}$ oder $u = \frac{3\pi}{2}$. Es gilt

$$\vec{r}(\tfrac{\pi}{2}, v) = \begin{pmatrix} a\cos v \\ a\sin v \\ b \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}(\tfrac{3\pi}{2}, v) = \begin{pmatrix} a\cos v \\ a\sin v \\ -b \end{pmatrix}.$$

Dies sind Kreise um den Ursprung mit Radius a, die in den Ebenen $z = \pm b$ liegen.

Aufgabe 2 **a)** Die Funktionen u und v sind jeweils auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert; die Funktion f dagegen nur auf $\{\,(u,v) : |u| \neq |v|\,\}$. Folglich ist $h(x,y)$ genau für die (x,y) definiert, für die $|u(x,y)| \neq |v(x,y)|$ gilt. Dies bedeutet

$$e^{-x-y} \neq e^{xy}, \qquad \text{also} \qquad -x-y \neq xy\,.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$-x \neq (1+x)y\,, \qquad \text{d.h.} \qquad x = -1 \quad \text{oder} \quad \left(x \neq -1 \quad \text{und} \quad y \neq -\frac{x}{1+x}\right).$$

Der Definitionsbereich der Funktion f ist somit

$$\Big\{\,(-1,y) : y \in \mathbb{R}\,\Big\} \cup \Big\{\,(x,y) : x \neq -1,\ y \neq -\frac{x}{1+x}\,\Big\}.$$

b) Wegen $h = f \circ \vec{g}$ mit

$$\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x-y} \\ e^{x}y \end{pmatrix}$$

gilt gemäß Kettenregel die Gleichung

$$h'(x,y) = f'(\vec{g}(x,y))\,\vec{g}\,'(x,y)\,.$$

Wir bilden die partiellen Ableitungen von f und erhalten

$$\begin{aligned} D_1 f(u,v) &= \frac{2u(u^2-v^2) - (u^2+v^2)2u}{(u^2-v^2)^2} = \frac{-4uv^2}{(u^2-v^2)^2}\,, \\ D_2 f(u,v) &= \frac{2v(u^2-v^2) - (u^2+v^2)(-2v)}{(u^2-v^2)^2} = \frac{4u^2 v}{(u^2-v^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$f'(u,v) = \frac{4uv}{(u^2-v^2)^2}\begin{pmatrix} -v & u \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung von $\vec{g}$ ist

$$\vec{g}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} -e^{-x-y} & -e^{-x-y} \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}.$$

Folglich erhalten wir

$$
\begin{aligned}
h'(x,y) &= f'(e^{-x-y}, e^{xy})\vec{g}\,'(x,y) \\
&= \frac{4e^{-x-y}e^{xy}}{(e^{-2(x+y)} - e^{2xy})^2} \begin{pmatrix} -e^{xy} & e^{-x-y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-x-y} & -e^{-x-y} \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix} \\
&= \frac{4e^{-x-y}e^{xy}}{(e^{-2(x+y)} - e^{2xy})^2} \begin{pmatrix} e^{xy}e^{-x-y} + e^{-x-y}ye^{xy} & e^{xy}e^{-x-y} + e^{-x-y}xe^{xy} \end{pmatrix} \\
&= \frac{4e^{-x-y}e^{xy}}{(e^{-2(x+y)} - e^{2xy})^2} e^{xy}e^{-x-y} \begin{pmatrix} 1+y & 1+x \end{pmatrix} = \frac{4e^{-2(x+y)}e^{2xy}}{(e^{-2(x+y)} - e^{2xy})^2} \begin{pmatrix} 1+y & 1+x \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

c) Nach Definition ist

$$
h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y)) = \frac{e^{-2(x+y)} + e^{2xy}}{e^{-2(x+y)} - e^{2xy}} = 1 + \frac{2e^{2xy}}{e^{-2(x+y)} - e^{2xy}}.
$$

Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
D_1h(x,y) &= \frac{4ye^{2xy}(e^{-2(x+y)} - e^{2xy}) - 2e^{2xy}(-2e^{-2(x+y)} - 2ye^{2xy})}{(e^{-2(x+y)} - e^{2xy})^2} \\
&= \frac{4(y+1)e^{2xy}e^{-2(x+y)}}{(e^{-2(x+y)} - e^{2xy})^2},
\end{aligned}
$$

und genauso

$$
D_2h(x,y) = \frac{4(x+1)e^{2xy}e^{-2(x+y)}}{(e^{-2(x+y)} - e^{2xy})^2}.
$$

Aufgabe 3 Das Taylorpolynom zweiten Grades um den Punkt $\vec{x}_0$ ist gegeben durch

$$
T_2(f;\vec{x}_0)(\vec{x}\,) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)^T(\vec{x} - \vec{x}_0) + \tfrac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0)^T H_f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0).
$$

Bei dieser Funktion ergibt sich

$$
f_x(x,y,z) = e^z, \qquad f_y(x,y,z) = -2y, \qquad f_z(x,y,z) = xe^z.
$$

Damit erhalten wir $f_x(1,-1,0) = 1$, $f_y(1,-1,0) = 2$ und $f_z(1,-1,0) = 1$. Weiter gilt

$$
f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{xz} = e^z, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{yz} = 0, \quad f_{zz} = xe^z.
$$

Insgesamt ergibt sich, mit $\vec{x}_0 := (x_0, y_0, z_0) := (1,-1,0)$,

$$
f(\vec{x}_0) = 0, \qquad \nabla f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad H_f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Folglich ist

$$
\begin{aligned}
T_2(f;\vec{x}_0)(x,y,z) &= 0 + (x - x_0) + 2(y - y_0) + (z - z_0) \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\bigl(-2(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + 2(x - x_0)(z - z_0)\bigr) \\
&= (x-1) + 2(y+1) + z - (y+1)^2 + \tfrac{1}{2}z^2 + (x-1)z.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 Gesucht ist

$$T_2(f;\vec{x}_0)(\vec{x}\,) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)^T(\vec{x}-\vec{x}_0) + \tfrac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x}_0)^T H_f(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0)\,.$$

Wir bestimmen zunächst einige partiellen Ableitungen:

$$f_x = \frac{y}{1+(xy)^2}\,, \quad f_{xx} = \frac{-2xy^3}{(1+(xy)^2)^2}\,, \quad f_{xy} = \frac{(1+x^2y^2)-2x^2y^2}{(1+(xy)^2)^2} = \frac{1-x^2y^2}{(1+(xy)^2)^2}\,.$$

Also ist $f_x(1,1)=\frac{1}{2}$, $f_{xx}(1,1)=-\frac{1}{2}$ und $f_{xy}(1,1)=0$. Wegen $f(x,y)=f(y,x)$ ergibt sich dann auch $f_y(1,1)=\frac{1}{2}$ und $f_{yy}(1,1)=-\frac{1}{2}$. Beachten wir $f(1,1)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$, so erhalten wir das Taylorpolynom

$$\begin{aligned} T_2(f;(1,1))(x,y) &= \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x-1) + \tfrac{1}{2}(y-1) \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\big(-\tfrac{1}{2}(x-1)^2 + 2\cdot 0\cdot(x-1)(y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2\big) \\ &= \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x-1) + \tfrac{1}{2}(y-1) - \tfrac{1}{4}(x-1)^2 - \tfrac{1}{4}(y-1)^2\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 Wir untersuchen zunächst das Innere von B. Wir suchen (x,y) mit

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y-6 \\ x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Zeile folgt $x=-2y$ und damit aus der ersten $-3y-6=0$. Also ist $y=-2$ und $x=4$. Wegen $f_{xx}=2$, $f_{xy}=1$ und $f_{yy}=2$ ist die Hessematrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

stets positiv definit ($2>0$ und Determinante >0); in $(4,-2)$ liegt daher ein lokales Minimum mit Wert $f(4,-2)=-10$ vor.

Wir kommen jetzt zum Rand der Menge B; dieser lässt sich parametrisieren in der Form $(x,y)=(6\cos t, 6\sin t)$, mit $t\in[0,2\pi)$. Wir betrachten daher die Funktion

$$\begin{aligned} h(t) := f(6\cos t, 6\sin t) &= 36\cos^2 t + 36\cos t\sin t + 36\sin^2 t - 36\cos t + 2 \\ &= 38 + 36\cos t(\sin t - 1) \end{aligned}$$

und untersuchen diese Funktion auf Extremstellen. Es gilt

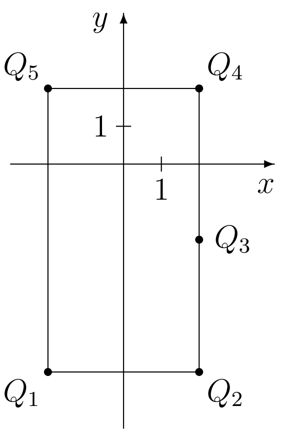
$$\begin{aligned} h'(t) &= -36\sin t(\sin t-1) + 36\cos t\cos t = 36(-\sin^2 t + \sin t + \cos^2 t) \\ &= 36(-2\sin^2 t + \sin t + 1) = -72(\sin^2 t - \tfrac{1}{2}\sin t - \tfrac{1}{2})\,. \end{aligned}$$

Aus $h'(t)=0$ ergibt sich also mit der Substitution $u=\sin t$ die Gleichung $u^2-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}$ mit den Lösungen $u_{1,2}=\frac{1}{4}\pm(\frac{1}{16}+\frac{1}{2})^{1/2}$. Es folgt: $\sin t=-\frac{1}{2}$ oder $\sin t=1$. Dies liefert $t_1=\frac{7}{6}\pi$, $t_2=\frac{11}{6}\pi$ und $t_3=\frac{\pi}{2}$ als verdächtige Stellen.

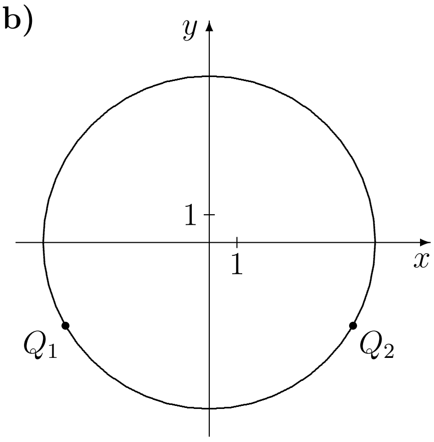
An der Stelle t_3 hat h' keinen Vorzeichenwechsel, denn es ist stets $\sin t\le 1$; also besitzt h hier kein Extremum.

An den beiden anderen Stellen dagegen wechselt h' das Vorzeichen: In t_1 wechselt $\sin t$ von Werten $>-\frac{1}{2}$ zu Werten $<-\frac{1}{2}$; damit wechselt dort $u^2-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}$ (mit $u=\sin t$) von $-$ nach $+$, d. h. h' wechselt von $+$ nach $-$; hier liegt also ein Maximum vor.

zu **a)**



zu **b)**



Genauso sieht man: Bei t_2 befindet sich ein Minimum.

Damit haben wir die zwei verdächtigen Randpunkte $Q_j = (6\cos(t_j), 6\sin(t_j))$, also

$$Q_1 = (-3\sqrt{3}, -3) \quad (\text{mögl. Max.}) \qquad \text{und} \qquad Q_2 = (3\sqrt{3}, -3) \quad (\text{mögl. Min.})\,.$$

Betrachten wir die dortigen Gradienten: $\nabla f(-3\sqrt{3}, -3) = (-9 - 6\sqrt{3}, -6 - 3\sqrt{3}\,)$ und $\nabla f(3\sqrt{3}, -3) = (-9 + 6\sqrt{3}, -6 + 3\sqrt{3}\,)$ weisen jeweils nach außen. Also: In Q_1 hat f ein Randmaximum (mit Wert $38 + 12\sqrt{3}\,$), in Q_2 dagegen kein Extremum.

Aufgabe 6 Zuerst suchen wir im Inneren von B nach Extrema. Die Forderung

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 1 + 2y \\ 2x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

führt wegen der zweiten Komponente auf $y = -x$ und damit wegen der ersten Komponente auf $3x^2 - 2x - 1 = 0$, d. h. $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$. Diese quadratische Gleichung besitzt die Lösungen $x_{1,2} = \frac{1}{3} \pm (\frac{1}{9} + \frac{1}{3})^{1/2}$, also $x_1 = 1$ und $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Die beiden stationären Stellen $(1, -1)$ und $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, die wir gefunden haben, liegen im Inneren von B. Wir untersuchen jetzt noch die Hessematrix: Wegen

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist $H_f(1, -1) = \left(\begin{smallmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Diese Matrix ist positiv definit (wegen $6 > 0$ und positiver Determinante), in $(1, -1)$ ist also ein lokales Minimum mit Wert $f(1, -1) = -1$. Die Matrix $H_f(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ist indefinit (denn ihre Determinante ist negativ), d. h. an dieser Stelle liegt kein Extremum vor.

Nach dem Inneren von B müssen wir jetzt noch den Rand untersuchen:

Für den unteren Rand von B betrachten wir $g_1(x) := f(x, -\frac{11}{2}) = x^3 - 12x + \frac{121}{4}$. Es gilt $g_1'(x) = 3x^2 - 12 < 0$ auf $(-2, 2)$, d. h. g_1 ist monoton fallend. Die Funktion g_1 hat daher ein Maximum in $x = -2$ und ein Minimum in $x = 2$. Somit ist $Q_1 := (-2, -\frac{11}{2})$ mögliche Maximalstelle von f und $Q_2 := (2, -\frac{11}{2})$ ist mögliche Minimalstelle.

Rechter Rand: $g_2(y) := f(2, y) = y^2 + 4y + 6 = (y + 2)^2 + 2$ hat auf $[-\frac{11}{2}, 2]$ drei Extrema: Ein Minimum bei $y = -2$ und Maxima bei $y = -\frac{11}{2}$ und bei $y = 2$. Folglich ist $Q_3 := (2, -2)$ mögliche Minimalstelle von f; die Punkte Q_2 und $Q_4 := (2, 2)$ sind mögliche Maximalstellen.

Oberer Rand: Für $g_3(x) := f(x,2) = x^3 + 3x + 4$ gilt $g_3'(x) = 3x^2 + 3 > 0$. Damit ist $Q_5 := (-2,2)$ mögliche Minimalstelle und Q_4 mögliche Maximalstelle von f.

Linker Rand: $g_4(y) := f(-2,y) = y^2 - 4y - 6 = (y-2)^2 - 10$. Die Funktion besitzt auf $[-\frac{11}{2}, 2]$ zwei Extrema: Ein Maximum bei $y = -\frac{11}{2}$ und ein Minimum bei $y = 2$. Damit ist Q_1 mögliche Maximalstelle und Q_5 mögliche Minimalstelle von f.

Wir betrachten nun der Reihe nach die verdächtigen Stellen:

Am einfachsten ist Q_3 zu behandeln, da hier der Rand von B glatt ist. In diesem Punkt zeigt der Gradient $\nabla f(2,-2) = (7,0)$ nach außen; zusammen mit der Tatsache, dass in Q_3 ein Minimum der Randfunktion g_2 vorliegt, folgt: In Q_3 besitzt f kein Extremum.

Auch der Punkt Q_2 ist leicht: Auf dem unteren Rand fällt f zu Q_2 hin ab, auf dem rechten Rand steigt f zu Q_2 hin an. Folglich liegt auch hier kein Extremum vor.

Betrachten wir als nächstes Q_4. Hier ist $\nabla f(2,2) = (15,8)$. Da f stetig differenzierbar ist, gilt $f_x > 0$ und $f_y > 0$ in einer Umgebung U von $(2,2)$. Für $(x,y) \in B \cap U$ ist dann

$$\begin{aligned} f(2,2) - f(x,y) &= f(2,2) - f(x,2) + f(x,2) - f(x,y) \\ &= \int_x^2 f_x(\xi,2)\,d\xi + \int_y^2 f_y(x,\eta)\,d\eta \geq 0\,, \end{aligned}$$

d. h. in Q_4 hat f ein lokales Maximum mit Wert $f(2,2) = 18$.

Als nächstes betrachten wir Q_5. Hier haben wir $\nabla f(-2,2) = (15,0)$; folglich ist in einer Umgebung U von $(-2,2)$ stets $f_x > 0$ erfüllt. Wir erhalten für $(x,y) \in B \cap U$

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(-2,2) &= f(x,y) - f(-2,y) + f(-2,y) - f(-2,2) \\ &= \int_{-2}^x f_x(\xi,y)\,d\xi + g_4(y) - g_4(2) \geq 0 \end{aligned}$$

(Beachte: g_4 ist monoton fallend), d. h. in Q_5 hat die Funktion f ein lokales Minimum mit Wert $f(-2,2) = -10$.

Es bleibt noch Q_1; hier gehen wir wie bei Q_5 vor: Wegen $\nabla f(-2,-\frac{11}{2}) = (0,-15)$ gibt es eine Umgebung U des Punktes, wo $f_y < 0$ gilt. Für $(x,y) \in B \cap U$ ist dann

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(-2,-\tfrac{11}{2}) &= f(x,y) - f(x,-\tfrac{11}{2}) + f(x,-\tfrac{11}{2}) - f(-2,-\tfrac{11}{2}) \\ &= \int_{-11/2}^y f_y(x,\eta)\,d\eta + g_1(x) - g_1(-2) \leq 0\,, \end{aligned}$$

denn g_1 fällt monoton. Damit folgt: Die Funktion f hat in Q_1 ein relatives Maximum mit Wert $f(-2,-\frac{11}{2}) = \frac{185}{4}$.

Aufgabe 7 **a)** Der Satz über die inverse Funktion liefert die Behauptung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Die Funktion $\vec{g}$ muss stetig differenzierbar sein, es muss $\vec{g}(\ln 2, \frac{\pi}{2}) = (0, \frac{3}{4})$ gelten, und die Matrix $\vec{g}\,'(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ muss invertierbar sein. Überprüfen wir diese Voraussetzungen: Die stetige Differenzierbarkeit ist offensichtlich. Weiter ist

$$\vec{g}(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \cosh(\ln 2)\cos\frac{\pi}{2} \\ \sinh(\ln 2)\sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(\ln 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \end{pmatrix},$$

denn $\sinh(\ln 2) = \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Schließlich gilt

$$\vec{g}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} \sinh x \cos y & -\cosh x \sin y \\ \cosh x \sin y & \sinh x \cos y \end{pmatrix},$$

und damit ist

$$\vec{g}\,'(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\cosh(\ln 2) \\ \cosh(\ln 2) & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar, denn $\cosh(\ln 2) = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \neq 0$.

Nach dem Satz über die inverse Funktion gilt

$$\big(\vec{g}^{-1}\big)'(0, \tfrac{3}{4}) = \big(\vec{g}\,'(\vec{g}^{-1}(0, \tfrac{3}{4}))\big)^{-1} = \big(\vec{g}\,'(\ln 2, \tfrac{\pi}{2})\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5/4 \\ 5/4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Funktion $\vec{g}$ ist überall stetig differenzierbar und für alle (x, y) ist

$$\det \vec{g}\,'(x,y) = (\sinh x \cos y)^2 + (\cosh x \sin y)^2 .$$

Diese Determinante wird also nur dann 0, wenn $\sinh x \cos y = 0$ und $\cosh x \sin y = 0$ gilt. Für $x > 0$ ist dies gleichbedeutend mit $\cos y = 0$ und $\sin y = 0$, kann also nie eintreten. Folglich ist für $x > 0$ die Matrix $\vec{g}\,'(x,y)$ stets regulär. Der Satz über die inverse Funktion liefert nun die lokale Invertierbarkeit.

Die Funktion $\vec{g}$ ist aber nicht injektiv, denn $\vec{g}(x, y + 2\pi) = \vec{g}(x, y)$.

Aufgabe 8 **a)** Wir müssen zeigen, dass in der Nähe von $(0, 0, 1, 1)$ durch die Gleichung

$$\vec{f}(x,y,u,v) = \vec{0}\,, \qquad \text{mit} \quad \vec{f}(x,y,u,v) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - u^2 + v^2 \\ x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 - 1 \end{pmatrix}$$

implizite Funktionen u und v definiert werden. Offenbar ist $\vec{f}$ stetig differenzierbar; zudem sieht man sofort, dass $\vec{f}(0,0,1,1) = \vec{0}$ gilt; die ersten zwei Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen sind also erfüllt. Jetzt müssen wir nur noch prüfen, ob die Matrix $\partial_{(u,v)}\vec{f}(0,0,1,1)$ regulär ist. Wegen

$$\vec{f}\,'(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad \partial_{(u,v)}\vec{f}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ -6u & 8v \end{pmatrix}$$

gilt $\partial_{(u,v)}\vec{f}(0,0,1,1) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{smallmatrix}\right)$, und diese Matrix ist tatsächlich regulär.

b) Bilden wir in beiden Gleichungen die partielle Ableitung nach x, wobei wir u und v jetzt als die implizit definierten Funktionen auffassen, so ergibt sich

$$2x - 2uu_x + 2vv_x = 0 \qquad \text{und} \qquad 2x - 6uu_x + 8vv_x = 0\,. \tag{$*$}$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0,0) = v(0,0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_x(0,0) + 2v_x(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6u_x(0,0) + 8v_x(0,0) = 0\,.$$

Dieses Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_x(0,0) = v_x(0,0) = 0$.