Aufgabe 1 f ist eine stetige Funktion und hat somit auf der abgeschlossenen Menge B sowohl ein Maximum, als auch ein Minimum.
Wir betrachten zuerst alle Punkte im Innern von B, in denen f differenzierbar ist. Das sind alle $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $\|\vec{v}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \in (0, 1)$.
(Also $x = y = z = 0$ nicht vergessen!) Nimmt f an solch einer Stelle ein lokales Extremum an, so muss gelten

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla f(\vec{v}) = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \begin{pmatrix} (z^2-1)x \\ (z^2-1)y \\ 2z\|\vec{v}\|^2 + z^3 - z \end{pmatrix}.$$

Die ersten Zeilen sind genau für $x = y = 0$ erfüllt (da $|z| < 1$); mit diesen Werten von x und y ist $\|\vec{v}\|^2 = z^2$ und damit gilt die dritte Zeile genau für $z = 0$ oder $z = \pm 1/\sqrt{3}$. Wir müssen im inneren also die Fälle $x = 0$, $y = 0$ und $z \in \{0, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\}$ ausprobieren ($x = y = z = 0$ eh, da dort f nicht differenzierbar ist!):

$$f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = 0, \qquad f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Nun bleibt noch der Rand von B zu berechnen. Dort gilt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und damit $f(x, y, z) = (z^2 - 1) =: g(z)$ mit $z \in [-1, +1]$. Wir sehen sofort, dass das für $|z| = 1$ die Funktion g ihr Maximum 0 und für $z = 0$ ihr Minimum -1 annimmt, welche damit auch die Extrema von f auf dem Rand von B sind. Damit ist -1 das Minimum von f auf B und 0 das Maximum.

Ohne die Vereinfachung, könnten wir auf dem Rand von B auch wie folgt rechnen:
Wir suchen die Extrema von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Setzen wir also $g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ so lautet die Nebenbedinung $g = 0$. Beide Funktionen f und g sind differenzierbar (außer in $\vec{0}$, aber das ist ja weit weg). Weiter gilt $\nabla g(x, y, z) = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, damit ist ∇g linear unabhängig (außer in $\vec{0}$). Setzen wir $h(x, y, z, \lambda) := f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$ so gibt es nach dem Satz von Lagrange, für alle Stellen $\vec{v}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, in denen f einen Extremwert auf dem Rand von B annimmt, ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla h(x, y, z, \lambda) = \begin{pmatrix} f_x + \lambda g_x \\ f_y + \lambda g_y \\ f_z + \lambda g_z \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z^2-1)x/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda x \\ (z^2-1)y/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda y \\ 2z\|\vec{v}_0\| + (z^3 - z)/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Die dritte Zeile ist erfüllt für $z = 0$ (in f einsetzen, hier finden wir das Minimum -1) oder für $z \neq 0$ und $2\|\vec{v}_0\| + (z^2 - 1)/\|\vec{v}_0\| + 2\lambda = 0$.
Aus der letzten Zeile erhalten wir $z^2 = 1 - x^2 - y^2$, was auch bedeutet $\|\vec{v}_0\| = 1$.
Zeile drei für $z \neq 0$ liefert $2\lambda = x^2 + y^2 - 2$. Einsetzen...
Offensichtlich ist dieser Weg mühsamer.

Aufgabe 2 Wir setzen $g(x,y,z) := a/x + b/y + c/z - 1$ und suchen Extrema von f unter der Nebenbedingung $g = 0$. Die Funktionen f und g sind stetig differenzierbar, und für alle $(x,y,z) \in (0,\infty)^3$ ist

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} -a/x^2 \\ -b/y^2 \\ -c/z^2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig. (*Ein* Vektor ist linear unabhängig, wenn er $\neq \vec{0}$ ist.) Aus dem Satz von Lagrange ergibt sich nun: Setzt man

$$h(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)\,,$$

und ist (x_0, y_0, z_0) eine lokale Extremalstelle der Funktion f unter der Nebenbedingung $g = 0$, so existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit $\nabla h(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = \vec{0}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\nabla h(x,y,z,\lambda) = \vec{0} &\iff (\, f_x + \lambda g_x,\ f_y + \lambda g_y,\ f_z + \lambda g_z,\ g\,) = (0,0,0,0) \\
&\iff 1 - \frac{\lambda a}{x^2} = 0\,, \quad 1 - \frac{\lambda b}{y^2} = 0\,, \quad 1 - \frac{\lambda c}{z^2} = 0\,, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} - 1 = 0 \\
&\iff \lambda \geq 0\,, \quad x = \sqrt{\lambda a}\,, \quad y = \sqrt{\lambda b}\,, \quad z = \sqrt{\lambda c}\,, \quad \frac{a}{\sqrt{\lambda a}} + \frac{b}{\sqrt{\lambda b}} + \frac{c}{\sqrt{\lambda c}} = 1 \\
&\iff \lambda \geq 0\,, \quad x = \sqrt{\lambda a}\,, \quad y = \sqrt{\lambda b}\,, \quad z = \sqrt{\lambda c}\,, \quad \sqrt{\lambda} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}
\end{aligned}$$

Somit ist die einzige Stelle, an der f ein Extremum unter der Nebenbedingung $g = 0$ besitzen könnte,

$$(x_0, y_0, z_0) := (\sqrt{\lambda_0 a}, \sqrt{\lambda_0 b}, \sqrt{\lambda_0 c}\,) \quad \text{mit} \quad \lambda_0 := \big(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\,\big)^2\,.$$

Es gilt $f(x_0, y_0, z_0) = \sqrt{\lambda_0 a} + \sqrt{\lambda_0 b} + \sqrt{\lambda_0 c} = \sqrt{\lambda_0}\big(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\,\big) = \lambda_0$.

Wir wollen nun noch beweisen, dass für $T := \{\, (x,y,z) \in (0,\infty)^3 \mid g(x,y,z) = 0 \,\}$

$$\min\{\, f(x,y,z) \mid (x,y,z) \in T \,\} = \lambda_0$$

gilt, dass also insbesondere dieses Minimum existiert. Es sei $(x,y,z) \in T$. Gilt $x > \lambda_0$ oder $y > \lambda_0$ oder $z > \lambda_0$, so folgt $f(x,y,z) > \lambda_0 = f(x_0, y_0, z_0)$. Andernfalls ist

$$(x,y,z) \in K := \{\, (x,y,z) \in T \mid x \leq \lambda_0,\ y \leq \lambda_0,\ z \leq \lambda_0 \,\}\,.$$

Für $(x,y,z) \in T$ gilt $x, y, z > 0$ und $a/x + b/y + c/z = 1$. Hieraus folgen sofort die Ungleichungen $x \geq a$, $y \geq b$ und $z \geq c$. Also ist

$$K = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, \lambda_0],\ y \in [b, \lambda_0],\ z \in [c, \lambda_0],\ g(x,y,z) = 0 \,\}$$

eine beschränkte und abgeschlossene Menge (Beachte: g ist stetig). Sie ist nicht leer, denn $(x_0, y_0, z_0) \in K$; also nimmt die stetige Funktion f auf K ihr Minimum an. Wegen $f(x,y,z) > f(x_0, y_0, z_0)$ auf $T \setminus K$ nimmt f somit auch auf T ihr Minimum an. Die einzige verdächtige Stelle ist (x_0, y_0, z_0), daher ist $f(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\,)^2$ das gesuchte Minimum.

Aufgabe 3 Da die Menge B offenbar beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt die stetige Funktion f dort ihr Minimum und ihr Maximum an; die Existenz der globalen Extrema ist also gesichert.

Gesucht sind Extrema von f unter den Nebenbedingungen

$$g_1(x,y,z) := x+y+z = 0 \qquad \text{und} \qquad g_2(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-1 = 0\,.$$

Wie bestimmen alle verdächtigen Stellen: Dies sind zunächst diejenigen (x,y,z) für die

$$\nabla g_1(x,y,z) = (1,1,1) \qquad \text{und} \qquad \nabla g_2(x,y,z) = (2x,2y,2z)$$

linear abhängig sind. Dies bedeutet $x=y=z$; solche Punkte können jedoch nicht die Nebenbedingungen erfüllen, denn aus $x+y+z=0$ folgte dann $x=y=z=0$ und damit wäre $x^2+y^2+z^2=1$ nicht erfüllt. Also erhalten wir sämtliche verdächtigen Stellen durch Anwenden des Satzes von Lagrange: Wir setzen

$$\begin{aligned} h(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &:= f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z) \\ &= 5x+y-3z+\lambda_1(x+y+z)+\lambda_2(x^2+y^2+z^2-1)\,, \end{aligned}$$

und lösen dann das Gleichungssystem $\nabla h = \vec{0}$, also die fünf Gleichungen

$$\begin{gathered} 5+\lambda_1+2\lambda_2 x = 0\,, \qquad 1+\lambda_1+2\lambda_2 y = 0\,, \qquad -3+\lambda_1+2\lambda_2 z = 0\,, \\ x+y+z=0\,, \qquad x^2+y^2+z^2-1=0\,. \end{gathered}$$

Addition der ersten drei Gleichungen liefert

$$3+3\lambda_1+2\lambda_2(x+y+z) = 0\,,$$

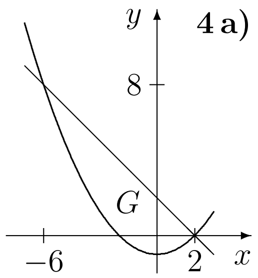
wegen $x+y+z=0$ also $\lambda_1=-1$. Damit wird die erste Gleichung zu $4+2\lambda_2 x=0$, was insbesondere $\lambda_2 \neq 0$ bedeutet. Die zweite Gleichung lautet $2\lambda_2 y = 0$, woraus mit $\lambda_2 \neq 0$ sofort $y=0$ folgt. Aus $x+y+z=0$ ergibt sich dann $z=-x$ und in $x^2+y^2+z^2=1$ eingesetzt folgt $2x^2=1$, also $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die extremwertverdächtigen Stellen sind damit

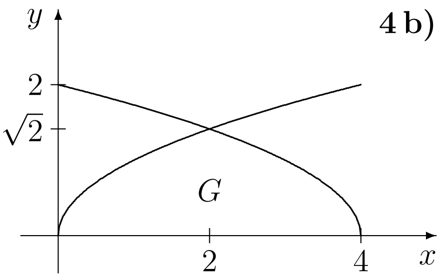
$$\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right) \qquad \text{und} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\right).$$

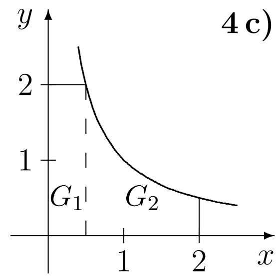
Die Funktionswerte dort sind $\pm 4\sqrt{2}$. Folglich besitzt f auf der Menge B das Maximum $4\sqrt{2}$ und das Minimum $-4\sqrt{2}$.

Aufgabe 4 **a)** Wir bestimmen die Schnittpunkte der beiden Kurven $y=\frac{1}{4}x^2-1$ und $y=2-x$. Dazu müssen wir die Lösungen der Gleichung $\frac{1}{4}x^2-1=2-x$, also $x^2+4x-12=0$ bestimmen. Dies sind $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+12}$, d. h. $x_1=-6$ und $x_2=2$ (siehe auch Skizze). Für den Flächeninhalt $I(G)=\iint\limits_G d(x,y)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} I(G) &= \int_{x=-6}^{2}\int_{y=x^2/4-1}^{2-x} dy\,dx = \int_{-6}^{2}\big((2-x)-(\tfrac{1}{4}x^2-1)\big)\,dx = \int_{-6}^{2}(-\tfrac{1}{4}x^2-x+3)\,dx \\ &= -\tfrac{1}{12}x^3-\tfrac{1}{2}x^2+3x\,\Big|_{x=-6}^{2} = -\tfrac{2}{3}-2+6-(18-18-18) = \tfrac{64}{3}\,. \end{aligned}$$







b) Auch hier schneiden wir die Kurven $x = y^2$ und $x = 4-y^2$. Dies liefert die Gleichung $y^2 = 4-y^2$, also $y^2 = 2$. Wegen $y > 0$ interessiert nur die Lösung $y = \sqrt{2}$ (siehe Skizze).

$$I(G) = \int_0^{\sqrt{2}} \big((4-y^2)-y^2\big)\,dy = 4y - \tfrac{2}{3}y^3 \,\Big|_{y=0}^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \tfrac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} = \tfrac{8}{3}\sqrt{2}$$

c) Wir untersuchen die letzte Bedingung genauer: $(2-x)(2-y) > 0$ ist erfüllt, wenn $x < 2$ und $y < 2$ gilt, oder aber, wenn $x > 2$ und $y > 2$ gilt. Im Falle $x > 2$ und $y > 2$ kann jedoch $xy < 1$ nicht erfüllt sein, also können wir $(2-x)(2-y) > 0$ in der Definition von G ersetzen durch $x, y < 2$.

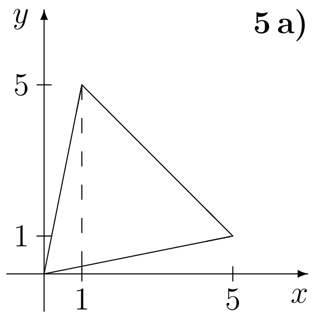
Wir unterteilen G in zwei Gebiete G_1 und G_2 (siehe Skizze). Dann ist

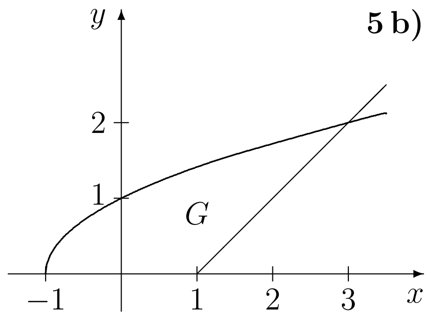
$$I(G) = I(G_1)+I(G_2) = \int_0^{1/2} 2\,dx + \int_{1/2}^{2} \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln x \,\Big|_{x=1/2}^{2} = 1 + \ln 2 - \ln\tfrac{1}{2} = 1 + 2\ln 2\,.$$

Aufgabe 5 **a)** Um diese Integral zu berechnen, unterteilen wir das Dreieck gemäß der Skizze in zwei Teilgebiete; das linke nennen wir G_1, das rechte G_2. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\iint\limits_G (y+x^2)\,d(x,y) &= \iint\limits_{G_1} (y+x^2)\,d(x,y) + \iint\limits_{G_2} (y+x^2)\,d(x,y) \\
&= \int_{x=0}^{1}\int_{y=x/5}^{5x} (y+x^2)\,dy\,dx + \int_{x=1}^{5}\int_{y=x/5}^{6-x} (y+x^2)\,dy\,dx \\
&= \int_{x=0}^{1} \left(\tfrac{1}{2}y^2 + x^2y\right)\Big|_{y=x/5}^{5x}\,dx + \int_{x=1}^{5} \left(\tfrac{1}{2}y^2 + x^2y\right)\Big|_{y=x/5}^{6-x}\,dx \\
&= \int_0^1 \left(\tfrac{25}{2}x^2 + 5x^3 - \tfrac{1}{50}x^2 - \tfrac{1}{5}x^3\right)dx \\
&\qquad + \int_1^5 \Big(\tfrac{1}{2}(36-12x+x^2) + x^2(6-x) - \tfrac{1}{50}x^2 - \tfrac{1}{5}x^3\Big)\,dx \\
&= \int_0^1 \left(\tfrac{312}{25}x^2 + \tfrac{24}{5}x^3\right)dx + \int_1^5 \left(-\tfrac{6}{5}x^3 + \tfrac{162}{25}x^2 - 6x + 18\right)dx \\
&= \left(\tfrac{104}{25}x^3 + \tfrac{6}{5}x^4\right)\Big|_{x=0}^{1} + \left(-\tfrac{3}{10}x^4 + \tfrac{54}{25}x^3 - 3x^2 + 18x\right)\Big|_{x=1}^{5} = \tfrac{134}{25} + \tfrac{2016}{25} = 86\,.
\end{aligned}$$

b) Das Gebiet liegt zwischen den Kurven $x = y+1$ und $x = y^2-1$. Untersuchen wir, wo sich diese Kurven schneiden, so führt dies zu der Gleichung $y^2 - y - 2 = 0$ mit den





Lösungen $y_{1,2} = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{4} + 2)^{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$, also $y_1 = -1$ und $y_2 = 2$ (vgl. Skizze). Also:

$$\iint\limits_G \cosh \frac{x}{y+1}\, d(x,y) = \int_{y=0}^{2} \int_{x=y^2-1}^{y+1} \cosh \frac{x}{y+1}\, dx\, dy$$

$$= \int_{y=0}^{2} (y+1) \sinh \frac{x}{y+1} \Big|_{x=y^2-1}^{y+1} dy = \int_0^2 \big((y+1)\sinh 1 - (y+1)\sinh(y-1)\big)\, dy\,.$$

Es ist

$$\int_0^2 (y+1)\sinh 1\, dy = \tfrac{1}{2}(y+1)^2 \sinh 1 \Big|_{y=0}^{2} = 4 \sinh 1\,,$$

und mit Produktintegration erhält man

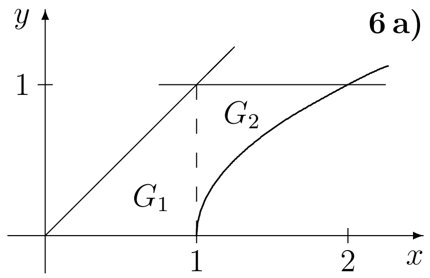
$$\begin{aligned}\int_0^2 (y+1)\sinh(y-1)\, dy &= (y+1)\cosh(y-1) \Big|_{y=0}^{2} - \int_0^2 \cosh(y-1)\, dy \\ &= 3\cosh 1 - \cosh(-1) - \big(\sinh(y-1)\big) \Big|_{y=0}^{2} \\ &= 2\cosh 1 - \sinh 1 + \sinh(-1) = 2\cosh 1 - 2\sinh 1\,.\end{aligned}$$

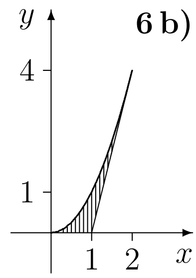
Insgesamt ergibt sich dann

$$\iint\limits_G \cosh \frac{x}{y+1}\, d(x,y) = 4\sinh 1 - (2\cosh 1 - 2\sinh 1) = 6\sinh 1 - 2\cosh 1\,.$$

Aufgabe 6 **a)** Wir spalten das Gebiet in zwei Teile auf (siehe Skizze) und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y\, dx\, dy &= \iint\limits_{G_1} x^2 y\, d(x,y) + \iint\limits_{G_2} x^2 y\, d(x,y) \\ &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} x^2 y\, dy\, dx + \int_{x=1}^{2} \int_{y=\sqrt{x-1}}^{1} x^2 y\, dy\, dx \\ &= \int_{x=0}^{1} \tfrac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{y=0}^{x} dx + \int_{x=1}^{2} \tfrac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{y=\sqrt{x-1}}^{1} dx \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2} x^4\, dx + \int_1^2 \big(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2(x-1)\big)\, dx \\ &= \tfrac{1}{10} x^5 \Big|_{x=0}^{1} + (-\tfrac{1}{8}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3) \Big|_{x=1}^{2} = \tfrac{1}{10} + (-2 + \tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{3}) = \tfrac{67}{120}\,.\end{aligned}$$





b) Die Kurven $y = x^2$ und $y = 4x - 4$ schneiden sich im Punkt $(2, 4)$. Also gilt

$$\int_0^2 \int_{\max\{0,4x-4\}}^{x^2} 2xy\,dy\,dx = \int_{y=0}^4 \int_{x=\sqrt{y}}^{y/4+1} 2xy\,dx\,dy = \int_{y=0}^4 x^2 y \,\Big|_{x=\sqrt{y}}^{y/4+1} dy$$
$$= \int_0^4 \big((\tfrac{1}{4}y+1)^2 y - y^2\big)\,dy = \int_0^4 (\tfrac{1}{16}y^3 - \tfrac{1}{2}y^2 + y)\,dy = \tfrac{1}{64}y^4 - \tfrac{1}{6}y^3 + \tfrac{1}{2}y^2 \,\Big|_{y=0}^4 = \tfrac{4}{3}\,.$$

Aufgabe 7 Die Parametrisierung $\vec{r}$ ist stetig differenzierbar; es gilt

$$\vec{r}\,'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)\,.$$

Folglich ergibt sich

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}$$
$$= \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t + 1} = \sqrt{2+t^2}\,.$$

Nach Definition des Linienintegrals ist dann

$$\int_\gamma f\,ds = \int_0^{2\pi} f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \Big(2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\Big)\sqrt{2+t^2}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\,dt = \tfrac{1}{3}(2+t^2)^{3/2}\,\Big|_{t=0}^{2\pi} = \tfrac{1}{3}\big((2+4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2}\big)$$
$$= \tfrac{2}{3}\sqrt{2}\big((1+2\pi^2)^{3/2} - 1\big)\,.$$

Aufgabe 8 8

a) Definitionsgemäß ist

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^{\cos t} \\ \cos t\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-e^{\cos t}\sin t + \sin t\cos^2 t)\,dt = e^{\cos t} - \tfrac{1}{3}\cos^3 t\,\Big|_{t=0}^{2\pi} = 0\,.$$

b) Auch hier brauchen wir nur die Definition des Linienintegrals:

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{\ln 2} \vec{v}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{\ln 2} \begin{pmatrix}\cosh t\\ -\sinh t\\ \sinh t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cosh t\\ \sinh t\\ \cosh t\end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{\ln 2} (\cosh^2 t - \sinh^2 t + \sinh t\cosh t)\,dt = \int_0^{\ln 2} (1+\sinh t\cosh t)\,dt$$

$$= \ln 2 + \tfrac{1}{2}\sinh^2 t\,\Big|_{t=0}^{\ln 2} = \ln 2 + \tfrac{1}{2}\sinh^2(\ln 2) = \ln 2 + \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2})\big)^2 = \ln 2 + \tfrac{9}{32}\,.$$

c) Die Kurve ist hier nur stückweise stetig differenzierbar; es ergibt sich

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^2 \vec{v}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^1 \vec{v}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt + \int_1^2 \vec{v}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix}\sin t\\ t^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} dt + \int_1^2 \begin{pmatrix}\sin 1\\ 1+(t-1)^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 \sin t\,dt + \int_1^2 \big(1+(t-1)^2\big)\,dt$$

$$= -\cos t\,\Big|_{t=0}^{1} + \big(t + \tfrac{1}{3}(t-1)^3\big)\,\Big|_{t=1}^{2} = (-\cos 1 + 1) + (2 + \tfrac{1}{3} - 1) = \tfrac{7}{3} - \cos 1\,.$$