Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. M. Muzzulini SS 2008

13. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (Ü)
Es sei $G := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < (x-1)^2 + y^2 < 4 \}$.

a) Überprüfen Sie rechnerisch für $v_1(x,y) := x^2 + xy$ und $v_2(x,y) := x^2y - y^2$ den Gaußschen Satz. Rechnen Sie also nach:

$$\iint\limits_G \big(D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y)\big)\, d(x,y) = \oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s}\,. \tag{1}$$

b) Zeigen Sie nun allgemein, dass Gleichung (1) für jede stetig diferenzierbare Funktion $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gilt.
Tip: Teilen Sie G auf in zwei Mengen, auf die Sie den Gaußschen Satz jeweils anwenden können. Und rechnen Sie nach, dass die Integrale über den zusätzlich entstandenen Rand sich auheben.

Aufgabe 2 (T)
Berechnen Sie die Integrale unter Verwendung des Gaußschen Satzes.

a) $$\iint\limits_G x\, d(x,y)\,, \qquad G := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0,\ x^{2/3} + y^{2/3} < 1 \}$$

b) $$\iint\limits_G (x^2 + y)\, d(x,y)\,, \qquad G := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}$$

Aufgabe 3 (Ü)
Es sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$; für $r > 0$ definieren wir $D_r := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r \}$. Die Funktion $\vec{v} : D_1 \to \mathbb{R}^2$ sei stetig differenzierbar. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{\partial D_r} \vec{v} \cdot d\vec{s} \qquad \text{und} \qquad \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{\partial D_r} \vec{v} \cdot \vec{N}\, ds\,.$$

(Hierbei bezeichnet $\vec{N}$ die äußere Einheitsnormale.)

Aufgabe 4 (Ü)
Die Funktionen $\vec{v}, \vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2z^3yx \\ 2y + z^3x^2 \\ y^2 + 3z^2yx^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{w}(x,y,z) := \begin{pmatrix} z^2 \\ e^z \\ ye^z + 2xz \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um Potentialfelder handelt, und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion.

b) Berechnen Sie die Linienintegrale

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} \qquad \text{und} \qquad \int_\gamma \vec{w} \cdot d\vec{s},$$

wobei die Kurve γ durch $\vec{r}(t) := (1-t, t, 0)$, mit $0 \le t \le 1$, gegeben ist.

Aufgabe 5 (T)
Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, und $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Funktion. Überprüfen Sie, unter welchen Voraussetzungen an a, b, c und f die folgenden Funktionen auf $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0 \}$ Potentialfelder sind, und berechnen Sie gegebenenfalls ein zugehöriges Potential.

a) $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + ay - 3z \\ x + 2y + bz \\ cx + y + 4z \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 + z + yf(xy) \\ 3x^2y - xf(xy) \\ x + z \end{pmatrix}$

Aufgabe 6 (T)
In $\mathbb{R}^2$ wird durch die Ungleichung

$$(x^2 + y^2)^2 < 3x^2 + 4y^2$$

eine Menge G definiert. Die Kurve γ sei der positiv orientierte Rand von G.

a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung von γ mittels Polarkoordinaten.

b) Berechnen Sie den Inhalt von G. (*Hinweis*: Leibnizsche Sektorformel)

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die mit (Ü) gekennzeichneten Aufgaben besprochen, in den Tutorien die mit (T) gekennzeichneten Aufgaben.

Termine für die Vordiplomklausuren Herbst 2008 :
Vordiplomklausur zu HM I : Montag, 22.09.2008, 08.00-10.00 Uhr
Vordiplomklausur zu HM II : Montag, 22.09.2008, 11.00-13.00 Uhr
Vordiplomklausur zu HM III : Dienstag, 23.09.2008, 08.00-10.00 Uhr

Hinweise zur Anmeldung:

!!!!! ANMELDESCHLUSS IST DER 18.7. !!!!!

Diplomstudenen melden sich durch Abgabe des Prüfungsscheins beim Sekretariat des Lehrstuhls (Mathematikgebäude, Zimmer 312) an.
Bachelorstudenten melden sich im Studienbüro an.