Aufgabe 1 **a)** Die Menge G ist ein Kreisring um den Punkt $(1,0)$ mit innerem Radius 1 und äußerem Radius 2 (siehe Skizze auf Seite 3). Um das Bereichsintegral über G zu berechnen, führen wir daher Polarkoordinaten ein:

$$x = 1 + r\cos\phi\,, \quad y = r\sin\phi\,, \quad d(x,y) = r\,d(r,\phi)\,, \qquad 1 \le r \le 2\,, \quad 0 \le \phi \le 2\pi\,.$$

Wegen $D_1 v_2(x,y) = 2xy$ und $D_2 v_1(x,y) = x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\iint\limits_G \big(D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y)\big)\,d(x,y) &= \iint\limits_G (2xy - x)\,d(x,y) \\
&= \int_{r=1}^{2}\int_{\phi=0}^{2\pi} \big(2(1+r\cos\phi)r\sin\phi - (1+r\cos\phi)\big)r\,d(r,\phi) \\
&= \int_{r=1}^{2}\int_{\phi=0}^{2\pi} (2r^2\sin\phi + 2r^3\cos\phi\sin\phi - r - r^2\cos\phi)\,d\phi\,dr \\
&= \int_{r=1}^{2} \Big(-2r^2\cos\phi + r^3\sin^2\phi - r\phi - r^2\sin\phi\Big)\Big|_{\phi=0}^{2\pi}\,dr \\
&= \int_1^2 -2\pi r\,dr = -\pi r^2\,\Big|_{r=1}^{2} = -\pi(4-1) = -3\pi\,.
\end{aligned}$$

Nun müssen wir das Linienintegral berechnen; dabei ist ∂G der positiv orientierte Rand von G. Hier besteht ∂G also aus zwei Kurven γ_1 und γ_2 (siehe Skizze auf Seite 3); beide sind so orientiert, dass G jeweils links liegt. Wir berechnen nun $\int_\gamma \vec v\cdot d\vec s$ für die durch

$$\vec r(t) = \begin{pmatrix} 1+\rho\cos t \\ \rho\sin t \end{pmatrix} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

gegebene Kurve γ, denn für $\rho = 1$ ist dies $-\gamma_1$, und für $\rho = 2$ erhalten wir γ_2. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec v\cdot d\vec s &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} v_1(\vec r(t)) \\ v_2(\vec r(t)) \end{pmatrix}\cdot \vec r\,'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} (1+\rho\cos t)^2 + (1+\rho\cos t)\rho\sin t \\ (1+\rho\cos t)^2\rho\sin t - (\rho\sin t)^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\rho\sin t \\ \rho\cos t \end{pmatrix}dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-\rho\sin t - 2\rho^2\cos t\sin t - \rho^3\sin t\cos^2 t - \rho^2\sin^2 t - \rho^3\cos t\sin^2 t \\
&\qquad + \rho^2\cos t\sin t + 2\rho^3\sin t\cos^2 t + \rho^4\sin t\cos^3 t - \rho^3\cos t\sin^2 t\big)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Alle zu integrierenden Funktionen außer $\sin^2 t$ haben offensichtlich Stammfunktionen, die 2π-periodisch sind; das Integral $\int_0^{2\pi}\ldots$ ergibt daher bei ihnen 0. Es verbleibt

$$\int_\gamma \vec v\cdot d\vec s = -\rho^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt = -\frac{\rho^2}{2}\int_0^{2\pi}(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = -\rho^2\pi\,.$$

(Im vorletzten Schritt haben wir $\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt = \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt$ benutzt.) Damit ergibt sich

$$\oint_{\partial G}\vec v\cdot d\vec s = \int_{\gamma_1}\vec v\cdot d\vec s + \int_{\gamma_2}\vec v\cdot d\vec s = -(-\pi) + (-4\pi) = -3\pi\,.$$

b) Wir zerlegen das Gebiet G in zwei Teile, nämlich

$$G_1 := \{(x,y) \in G : y \leq 0\}, \qquad \tilde{G}_2 := \{(x,y) \in G : y > 0\}.$$

(siehe Skizze auf Seite 3) Damit ist G die disjunkte Vereinigung von G_1 und $\tilde{G}_2$. Sei G_2 der Abschluss von $\tilde{G}_2$. Integriert man eine stetige Funktion über G_2, so erhält man das selbe Ergebnis, wie wenn man über $\tilde{G}_2$ integriert, da das Volumen $G_2 \setminus \tilde{G}_2$ in $\mathbb{R}^2$ Null ist. Damit erhalten wir $\iint_G (\cdot)\ d(x,y) = \iint_{G_1} (\cdot)\ d(x,y) + \iint_{G_2} (\cdot)\ d(x,y)$. Seien nun für $j \in 1, 2$, die Funktionen $c_j, d_j = [-1,3] \to \mathbb{R}$ so, dass

$$G_j = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 3, c_j(x) \leq y \leq d_j(x)\}.$$

Wir wenden den Gaußschen Integralsatz für G_1 und G_2 an und können so wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned}
&\iint_G \big(D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y)\big)\, d(x,y) = \\
&\iint_{G_1} \big(D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y)\big)\, d(x,y) + \iint_{G_1} \big(D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y)\big)\, d(x,y) = \\
&\oint_{\partial G_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \oint_{\partial G_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} \\
&= \int_{-1}^{3} \vec{v} \cdot d\begin{pmatrix} x \\ c_1(x) \end{pmatrix} - \int_{-1}^{3} \vec{v} \cdot d\begin{pmatrix} x \\ d_1(x) \end{pmatrix} + \int_{-1}^{3} \vec{v} \cdot d\begin{pmatrix} x \\ c_2(x) \end{pmatrix} - \int_{-1}^{3} \vec{v} \cdot d\begin{pmatrix} x \\ d_2(x) \end{pmatrix}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Klar: für $-1 < x < 1$ oder $2 < x < 3$ gilt $d_1 = c_2(x)$. Damit erhalten wir

$$\int_{-1}^{0} \vec{v} \cdot d\begin{pmatrix} x \\ d_1(x) \end{pmatrix} = \int_{-1}^{0} \vec{v} \cdot d\begin{pmatrix} x \\ c_1(x) \end{pmatrix},$$

und das selbe Resultat auch auf dem Intervall $(2,3)$. Über diesen Intervallen heben sich die Integrale in (1) auf, weshalb dieser Ausdruck, nach Umsortierung auf

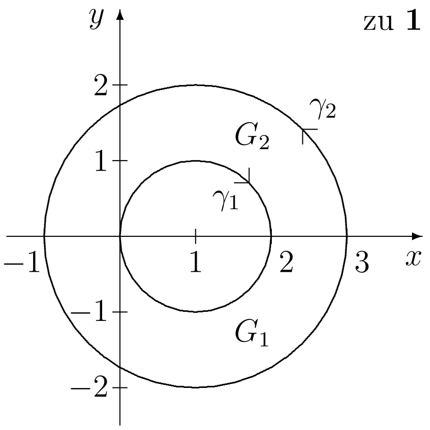
$$\left(\int_{-1}^{3} \vec{v} \cdot d\begin{pmatrix} x \\ c_1(x) \end{pmatrix} - \int_{-1}^{3} \vec{v} \cdot d\begin{pmatrix} x \\ d_2(x) \end{pmatrix} \right) + \left(\int_{0}^{2} \vec{v} \cdot d\begin{pmatrix} x \\ c_2(x) \end{pmatrix} - \int_{0}^{2} \vec{v} \cdot d\begin{pmatrix} x \\ d_1(x) \end{pmatrix} \right)$$

schrumpft. Dies ist das gesuchte Ergebnis, denn der linke Term ist das Linienintegral um den äußeren Rand, der rechte Term um den inneren Rand, jeweils positiv orientiert, d.h. G liegt links vom Weg.

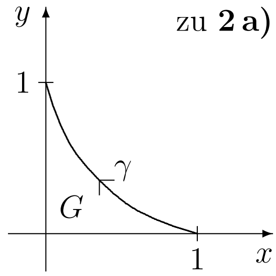
Aufgabe 2 **a)** Um das Integral mit dem Gaußschen Satz zu berechnen, brauchen wir Funktionen v_1 und v_2 mit $v_{2x} - v_{1y} = x$. Wir setzen $v_2 := 0$, $v_1(x,y) := -xy$. Dann gilt

$$\iint_G x\, d(x,y) = \iint_G (v_{2x} - v_{1y})\, d(x,y) = \oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_{\partial G} -xy\, dx\,.$$

zu **1**



zu **2 a)**



Auf den Teilen von ∂G (siehe Skizze), die auf den Koordinatenachsen liegen, verschwindet die zu integrierende Funktion $-xy$, also ist

$$\iint_G x\,d(x,y) = \int_\gamma -xy\,dx\,,$$

wobei die Kurve γ der gebogene Teil von ∂G ist. Dort gilt $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, d. h. der Punkt $(x^{1/3}, y^{1/3})$ liegt auf dem Einheitskreis, lässt sich also als $(\cos t, \sin t)$ darstellen. Die Kurve γ ist somit gegeben durch die Parametrisierung $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ mit $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Es folgt

$$\iint_G x\,d(x,y) = \int_0^{\pi/2} -\cos^3 t\,\sin^3 t \cdot (-3\sin t\cos^2 t)\,dt = 3\int_0^{\pi/2} \cos^5 t\sin^4 t\,dt\,;$$

und mit der Substitution $u = \sin t$ $(du = \cos t\,dt)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} &= 3\int_0^1 (\sqrt{1-u^2}\,)^4 u^4\,du = 3\int_0^1 (1-u^2)^2 u^4\,du = 3\int_0^1 (u^4 - 2u^6 + u^8)\,du \\ &= 3(\tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{2}{7}u^7 + \tfrac{1}{9}u^9)\Big|_{u=0}^1 = 3(\tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{9}) = \tfrac{8}{105}\,. \end{aligned}$$

b) Setzen wir $v_1(x,y) := -x^2y$ und $v_2(x,y) := xy$, so ist $v_{2x} - v_{1y} = y + x^2$, und der Gaußsche Integralsatz liefert

$$\iint_G (x^2+y)\,d(x,y) = \iint_G (v_{2x} - v_{1y})\,d(x,y) = \oint_{\partial G} \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}\,.$$

Der positiv orientierte Rand der Einheitskreisscheibe G ist gegeben durch die Parametrisierung $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $0 \le t \le 2\pi$. Folglich ergibt sich

$$\iint_G (x^2+y)\,d(x,y) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} v_1(\vec{r}(t)) \\ v_2(\vec{r}(t)) \end{pmatrix} \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos^2 t\,\sin t \\ \cos t\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \big(\cos^2 t\,\sin^2 t + \sin t\cos^2 t\big)\,dt = \int_0^{2\pi} \big(\tfrac{1}{4}\sin^2(2t) + \sin t\cos^2 t\big)\,dt \\ &= \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\,dt - \tfrac{1}{3}\cos^3 t\,\Big|_{t=0}^{2\pi} = \tfrac{1}{8}\int_0^{4\pi} \sin^2(u)\,du \overset{\text{vgl. }\mathbf{1}}{=} \tfrac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 Der Gaußsche Integralsatz liefert

$$\oint_{\partial D_r} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{D_r} (D_1 v_2 - D_2 v_1)\, d(x,y)\,.$$

Der hier auftretende Integrand $g(x,y) := D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y)$ ist stetig, denn nach Voraussetzung ist $\vec{v}$ stetig differenzierbar. Mit $h(x,y) := g(x,y) - g(\vec{x}_0)$ gilt

$$\oint_{\partial D_r} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{D_r} g(\vec{x}_0)\, d(x,y) + \iint\limits_{D_r} h(x,y)\, d(x,y) = g(\vec{x}_0) \cdot I(D_r) + \iint\limits_{D_r} h(x,y)\, d(x,y)\,.$$

Berücksichtigen wir $I(D_r) = \pi r^2$, so folgt

$$\frac{1}{\pi r^2} \oint_{\partial D_r} \vec{v} \cdot d\vec{s} = g(\vec{x}_0) + \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{D_r} h(x,y)\, d(x,y)\,.$$

Da das Bereichsintegral durch zwei eindimensionale Integrale definiert ist, gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{D_r} h(x,y)\, d(x,y) \right| &\le \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{D_r} |h(x,y)|\, d(x,y) \le \frac{1}{\pi r^2} \max_{(x,y)\in D_r} |h(x,y)| \cdot I(D_r) \\ &= \max_{(x,y)\in D_r} |h(x,y)| \xrightarrow{r\to 0} 0\,. \end{aligned}$$

(Beachte: $h(\vec{x}_0) = 0$ und h ist stetig.) Damit ergibt sich

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{\partial D_r} \vec{v} \cdot d\vec{s} = g(\vec{x}_0) = D_1 v_2(\vec{x}_0) - D_2 v_1(\vec{x}_0)\,.$$

Der zweite Grenzwert berechnet sich ganz entsprechend: Laut Divergenzsatz ist

$$\oint_{\partial D_r} \vec{v} \cdot \vec{N}\, ds = \iint\limits_{D_r} (\nabla \cdot \vec{v}\,)\, d(x,y)\,,$$

und damit folgt

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{\partial D_r} \vec{v} \cdot \vec{N}\, ds = (\nabla \cdot \vec{v}\,)(\vec{x}_0)\,.$$

Aufgabe 4 **a)** Die Funktionen sind stetig differenzierbar und auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, gilt: Es handelt sich genau dann um Potentialfelder, wenn die Rotation verschwindet, wenn also $D_j v_k = D_k v_j$ für alle j,k gilt. Wegen

$$D_2 v_3(x,y,z) = 2y + 3z^2x^2\,, \qquad D_3 v_2(x,y,z) = 3z^2x^2 \ne D_2 v_3(x,y,z)$$

ist $\vec{v}$ also kein Potentialfeld, d. h. $\vec{v}$ besitzt keine Stammfunktion.

Für $\vec{w}$ hingegen gilt

$$D_2 v_3 = e^z = D_3 v_2\,, \qquad D_3 v_1 = 2z = D_1 v_3\,, \qquad D_1 v_2 = 0 = D_2 v_1\,.$$

Somit ist $\vec{w}$ ein Potentialfeld, besitzt also eine Stammfunktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Für diese Stammfunktion muss $f_x = z^2$ gelten. Integrieren bezüglich x liefert: Es ist

$$f(x, y, z) = z^2 x + c(y, z)$$

mit einer gewissen Funktion $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (Die „Integrationskonstante" kann also noch von y und z abhängen.) Es folgt $f_y = c_y(y, z)$, und dies soll $= e^z$ sein. Daher haben wir $c(y, z) = ye^z + d(z)$ mit einer gewissen Funktion $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wissen also

$$f(x, y, z) = z^2 x + ye^z + d(z)\,,$$

und hieraus folgt $f_z = 2zx + ye^z + d'(z)$. Damit dies gleich der dritten Komponente von $\vec{w}$ wird, muss $d' = 0$ gelten. Wir wählen $d = 0$ und haben eine Stammfunktion von $\vec{w}$:

$$f(x, y, z) = z^2 x + ye^z\,.$$

b) Bei $\vec{v}$ müssen wir das Linienintegral nach Definition ausrechnen:

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = -\tfrac{1}{3}t^3 + t^2 \Big|_{t=0}^{1} = \tfrac{2}{3}\,.$$

Bei $\vec{w}$ dagegen können wir auf die oben berechnete Stammfunktion f zurückgreifen:

$$\int_\gamma \vec{w} \cdot d\vec{s} = f\big(\vec{r}(1)\big) - f\big(\vec{r}(0)\big) = f(0, 1, 0) - f(1, 0, 0) = 1 - 0 = 1\,.$$

Aufgabe 5 Die Menge $G := \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0 \,\}$, auf der wir die Funktionen betrachten, ist einfach zusammenhängend, und die Funktion $\vec{v}$ ist jeweils stetig differenzierbar. Daher gilt: $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$.

a) Es gilt

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} D_2 v_3 - D_3 v_2 \\ D_3 v_1 - D_1 v_3 \\ D_1 v_2 - D_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - b \\ -3 - c \\ 1 - a \end{pmatrix}.$$

Wir lesen ab: $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn $a = 1$, $b = 1$ und $c = -3$ gilt. In diesem Falle können wir von

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y - 3z \\ x + 2y + z \\ -3x + y + 4z \end{pmatrix}$$

eine Stammfunktion g bestimmen. Da $g_x = x + y - 3z$ gelten soll, ergibt sich

$$g(x, y, z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + c(y, z)$$

mit einer gewissen Funktion c. Es folgt $g_y = x + c_y(y, z)$, und dies soll $= x + 2y + z$ sein. Das bedeutet $c_y = 2y + z$, also $c(y, z) = y^2 + yz + d(z)$ mit einer gewissen Funktion d. Somit:

$$g(x, y, z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + y^2 + yz + d(z)\,.$$

Hieraus folgt $g_z = -3x + y + d'(z)$, und damit ergibt sich die Forderung $d'(z) = 4z$. Wir wählen $d(z) = 2z^2$ und haben damit das Potential

$$g(x, y, z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + y^2 + yz + 2z^2 .$$

b) Hier ist

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 1 - 1 \\ 6xy - f(xy) - xf'(xy)y - \big(2xy + f(xy) + yf'(xy)x\big) \end{pmatrix} .$$

Folglich gilt $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ genau dann, wenn f der Gleichung

$$4xy - 2f(xy) - 2xyf'(xy) = 0$$

genügt. Für alle $t > 0$ muss also gelten:

$$f(t) + tf'(t) = 2t .$$

Diese Differentialgleichung für f gilt es nun zu lösen:

Die homogene Gleichung $f + tf' = 0$, also $f' = -f/t$ besitzt die allgemeine Lösung $f_{\mathrm{h}}(t) = C \exp(\int^t -1/\tau \, d\tau) = C/t$ mit $C \in \mathbb{R}$. Eine spezielle Lösung f_{p} der inhomogenen Gleichung gewinnen wir durch Variation der Konstanten: Gehen wir mit dem Ansatz $f_{\mathrm{p}}(t) = C(t)/t$ in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$C(t)/t + t\big(C'(t)/t - C(t)/t^2\big) = 2t , \qquad \text{also} \qquad C'(t) = 2t .$$

Wir wählen $C(t) = t^2$ und erhalten die Lösung $f_{\mathrm{p}}(t) = t$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet $f(t) = f_{\mathrm{p}}(t) + f_{\mathrm{h}}(t) = t + C/t$.

Nur wenn f von dieser Gestalt ist, ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld. Bestimmen wir nun ein Potential von

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 + z + y(xy + C/xy) \\ 3x^2y - x(xy + C/xy) \\ x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2 + z + C/x \\ 2x^2y - C/y \\ x + z \end{pmatrix} .$$

Für ein Potential g muss g_x mit der ersten Komponente von $\vec{v}$ übereinstimmen. Dies liefert

$$g(x, y, z) = x^2y^2 + xz + C \ln x + c(y, z) .$$

Damit ist $g_y = 2x^2y + c_y(y, z)$, und dies stimmt mit der zweiten Komponente von $\vec{v}$ überein, wenn $c_y = -C/y$. Somit ist $c(y, z) = -C \ln y + d(z)$, also

$$g(x, y, z) = x^2y^2 + xz + C \ln x - C \ln y + d(z) .$$

Hieraus folgt $g_z = x + d'(z)$. Damit dies mit $v_3 = x + z$ übereinstimmt, muss $d'(z) = z$ sein. Wir wählen $d(z) = \frac{1}{2}z^2$ und erhalten

$$g(x, y, z) = x^2y^2 + xz + C \ln(x/y) + \tfrac{1}{2}z^2 .$$

Aufgabe 6 **a)** Wir setzen in die Ungleichung, die G definiert, Polarkoordinaten (also $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$ mit $r \geq 0$ und $0 \leq \phi < 2\pi$) ein:

$$(r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi)^2 < 3r^2\cos^2\phi + 4r^2\sin^2\phi\,.$$

Wegen $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ bedeutet das $r^4 < r^2(3 + \sin^2\phi)$. Dies ist genau dann erfüllt, wenn $r \neq 0$ und $r^2 < 3 + \sin^2\phi$. Der Rand von G besteht folglich aus dem Punkt $(0,0)$ und der durch die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) := \begin{pmatrix} r(t)\cos t \\ r(t)\sin t \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)\,, \qquad \text{wobei} \;\; r(t) := \sqrt{3 + \sin^2 t}\,,$$

gegebenen Kurve.

b) Die Leibnizsche Sektorformel liefert

$$I(G) = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(t)\,dt = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (3 + \sin^2 t)\,dt \overset{\text{vgl. }\mathbf{1}}{=} \tfrac{1}{2}(6\pi + \pi) = \tfrac{7}{2}\pi\,.$$