Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. M. Muzzulini SS 2008

14. Übungsblatt

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 Eine kugelförmige Gasansammlung habe, in Abhängigkeit vom Radius r, die Massendichte $\rho(r) = \frac{1}{1+r^2}$ für $0 \leq r \leq 1$ und $\rho(r) = 0$ für $r > 1$. Berechnen Sie die geammte Masse.

Sehr anspruchsvolle Zusatzaufgabe (hierfür gibt es keine Musterlösung): Zeigen Sie, dass ein Masseteilchen innerhalb einer Hohlkugel (mit homogener Massendichte) von dieser Hohlkugel keine Massenanziehung erfährt.
Tip: Setzen Sie zwei Koordinaten des Masseteilchens gleich Null. Aus Symmetriegründen reicht es, die Anziehung in die eine Dimension zu berechnen.

Aufgabe 2 Die Fläche $\mathcal{F}$ ist gegeben durch die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ 2uv \end{pmatrix} \qquad (u, v \in \mathbb{R}) .$$

Weiter sei $Z := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Teils von $\mathcal{F}$, der innerhalb des Zylinders Z liegt.

Aufgabe 3 Die Funktion $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei stetig differenzierbar.

a) Geben Sie eine Bedingung für $\vec{v}$ an, die erfüllt sein muss, wenn ein Vektorfeld $\vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ existiert mit $\nabla \times \vec{w} = \vec{v}$.
(Man nennt $\vec{w}$ in diesem Falle ein *Vektorpotential* von $\vec{v}$.)

b) Überprüfen Sie diese Bedingung für

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix} ,$$

und bestimmen Sie dann ein Vektorpotential $\vec{w}$ von $\vec{v}$.

Hinweis: Es gibt ein Vektorpotential $\vec{w}$ mit $w_3 = 0$.

Aufgabe 4 Es sei $\partial\mathcal{F}$ der positiv orientierte Rand der Fläche $\mathcal{F}$, die gegeben ist durch

$$z(x,y) = y^2 - x^2\,, \qquad x^2 + y^2 \leq 3\,.$$

Berechnen Sie für die Funktion

$$\vec{f}(x,y,z) := \begin{pmatrix} z - 5y \\ 9x - 3z \\ y - 2x \end{pmatrix}$$

das Linienintegral $\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ unter Verwendung des Stokesschen Integralsatzes.

Aufgabe 5 Die Oberfläche von $Z := \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 \,\}$ wird mit $\mathcal{F}$ bezeichnet, und es sei

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ x^2 z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do$$

(wobei $\vec{N}$ der Einheitsnormalenvektor ist, der ins Äußere des Zylinders Z weist) auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) mittels der Definition des Oberflächenintegrals;

b) unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 6 Die seit Jahren bewährte Marzipankartoffel

$$M := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |z| \leq \sqrt{1 - \tfrac{1}{16}x^2 - \tfrac{1}{8}y^2} \right\}$$

muss sich dieses Jahr der neuen Marzipankartoffel

$$\widetilde{M} := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |z| \leq \sqrt{3 - x^2}\sqrt{3 - y^2} \right\}$$

erwehren, die 3 Prozent billiger angeboten wird. Welche der beiden würden Sie kaufen?

Hinweis Die Lösungen zu allen Aufgaben stehen bald online zur Verfügung. Die meisten der Aufagben werden in der ersten Übung zu HM III vorgerechnet.

Termine für die Vordiplomklausuren Herbst 2008 :
Vordiplomklausur zu HM I : Montag, 22.09.2008, 08.00-10.00 Uhr
Vordiplomklausur zu HM II : Montag, 22.09.2008, 11.00-13.00 Uhr
Vordiplomklausur zu HM III : Dienstag, 23.09.2008, 08.00-10.00 Uhr