Aufgabe 1 Wir müssen die Dichte aufintegrieren, also

$$m = \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Kugelkoordinaten

$$f(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\phi \\ \cos\theta \cos\phi \\ r \sin\phi \end{pmatrix}$$

ergibt die Jakobimatrix

$$J_f = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

und deren Determinante $\det J_f = r^2 \sin^2\theta$. Damit können wir durch substitution

$$\begin{aligned} m &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho\big(f(r,\theta,\phi)\big)\, |J_f\big(f(r,\theta,\phi)\big)|\, d\phi\, d\theta\, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+r^2} r^2 \sin^2\theta\, d\phi\, d\theta\, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi \frac{1}{1+r^2} r^2 \sin^2\theta\, d\theta\, dr \\ &= \pi^2 \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}\, dr = \pi^2 \int_0^1 1 - \frac{1}{1+r^2}\, dr \\ &= \pi^2 (1 - [\arctan r]_{r=0}^1) = \pi^2\Big(1 - \Big(\frac{\pi}{4} - 0\Big)\Big) = \pi^2 - \frac{\pi^3}{4}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 Wir bestimmen zunächst, welcher Teil $\mathcal{F}_Z$ von $\mathcal{F}$ innerhalb von Z liegt:

$$\vec{r}(u,v) \in Z \iff (u+v)^2 + (u-v)^2 \le 4 \iff 2u^2 + 2v^2 \le 4\,.$$

Die Fläche $\mathcal{F}_Z$ ist also durch $\vec{r}(u,v)$ mit $(u,v) \in U := \{\, (u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \le 2 \,\}$ gegeben. Definitionsgemäß ist dann

$$I(\mathcal{F}_Z) = \iint_U \big\| \big(D_1\vec{r} \times D_2\vec{r}\big)(u,v) \big\|\; d(u,v)\,.$$

Hier haben wir

$$D_1\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}, \quad D_2\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2u \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \big(D_1\vec{r} \times D_2\vec{r}\big)(u,v) = \begin{pmatrix} 2u+2v \\ 2v-2u \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$I(\mathcal{F}_Z) = \iint_U \sqrt{(2u+2v)^2 + (2v-2u)^2 + 4}\; d(u,v) = \iint_U \sqrt{8(u^2+v^2)+4}\; d(u,v)\,.$$

Wir gehen zu Polarkoordinaten über: $u = r\cos\phi$, $v = r\sin\phi$, $d(u,v) = r\,d(r,\phi)$, mit $0 \le r \le \sqrt{2}$ und $0 \le \phi \le 2\pi$.

$$\begin{aligned} I(\mathfrak{F}_Z) &= \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} 2\sqrt{2(r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi)+1}\cdot r\,d\phi\,dr = 4\pi \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{2r^2+1}\,dr \\ &= \tfrac{2}{3}\pi(2r^2+1)^{3/2}\Big|_{r=0}^{\sqrt{2}} = \tfrac{2}{3}\pi\big(5^{3/2}-1\big) = \tfrac{2}{3}\pi\big(5\sqrt{5}-1\big)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 **a)** Wie wir aus der Vorlesung wissen, gilt für jedes zweimal stetig differenzierbare Vektorfeld $\vec{w}$ die Gleichung

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{w}\,) = 0\,, \qquad \text{also} \qquad \div\,(\operatorname{rot}\vec{w}\,) = 0\,.$$

Daraus können wir folgern: Ist $\vec{v} = \nabla\times\vec{w}$, so muss $\nabla\cdot\vec{v} = 0$ (also $\div\vec{v} = 0$) gelten.

(Ebenso kann man aus $\nabla\times(\nabla f) = \vec{0}$ schließen, dass für jedes Vektorfeld $\vec{v}$, das eine Stammfunktion f besitzt, $\nabla\times\vec{v} = \vec{0}$, also $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$, gelten muss.)

b) Für diese Funktion $\vec{v}$ gilt

$$\div\vec{v} = D_1v_1 + D_2v_2 + D_3v_3 = 0+0+0 = 0\,,$$

die Bedingung aus **a)** ist also erfüllt.

Gemäß Hinweis suchen wir jetzt ein Vektorpotential der Form $\vec{w} = (w_1, w_2, 0)$. Es ist

$$\nabla\times\vec{w} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_3w_2 \\ D_3w_1 \\ D_1w_2 - D_2w_1 \end{pmatrix}.$$

Damit $\nabla\times\vec{w} = \vec{v}$ erfüllt ist, muss insbesondere $-D_3w_2 = v_1 = y - z$ gelten. Somit ist

$$w_2(x,y,z) = -yz + \tfrac{1}{2}z^2 + c(x,y)$$

mit einer gewissen Funktion c. Des Weiteren soll $D_3w_1 = v_2 = z - x$ gelten; folglich ist

$$w_1(x,y,z) = \tfrac{1}{2}z^2 - xz + d(x,y)$$

mit einer gewissen Funktion d. Damit ergibt sich

$$D_1w_2 - D_2w_1 = c_x - d_y\,.$$

Die Funktionen c und d müssen nun so gewählt werden, dass $c_x - d_y = v_3 = x - y$ gilt. Für $c_x = x$ und $d_y = y$ ist dies der Fall; wir wählen daher $c(x,y) = \frac{1}{2}x^2$ und $d(x,y) = \frac{1}{2}y^2$. Ein Vektorpotential von $\vec{v}$ ist dann

$$\vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}z^2 - xz + \frac{1}{2}y^2 \\ -yz + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 Die Fläche $\mathcal{F}$ besitzt die Parametrisierung

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v^2 - u^2 \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in U := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3 \,\}.$$

Der Stokessche Integralsatz liefert

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{f}) \cdot d\vec{o} = \iint\limits_{U} (\nabla \times \vec{f})\big(\vec{r}(u,v)\big) \cdot \big(\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)\big)\, d(u,v).$$

Nun ist

$$\vec{r}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{pmatrix} D_2 f_3 - D_3 f_2 \\ D_3 f_1 - D_1 f_3 \\ D_1 f_2 - D_2 f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 1 - (-2) \\ 9 - (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Folglich ergibt sich

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{U} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} d(u,v) = \iint\limits_{U} (8u - 6v + 14)\, d(u,v);$$

und mit Polarkoordinaten (U ist der Kreis um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{3}$) erhält man unter Berücksichtigung von $\int_0^{2\pi} \cos\phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin\phi \, d\phi = 0$

$$\begin{aligned} &= \int_{r=0}^{\sqrt{3}} \int_{\phi=0}^{2\pi} (8r\cos\phi - 6r\sin\phi + 14)\, r \, d\phi \, dr = \int_{r=0}^{\sqrt{3}} 28\pi r \, dr \\ &= 28\pi \cdot \tfrac{1}{2} r^2 \Big|_{r=0}^{\sqrt{3}} = 28\pi \cdot \tfrac{3}{2} = 42\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 **a)** Die Oberfläche $\mathcal{F}$ des Zylinders Z besteht aus drei Teilen, nämlich aus der Bodenfläche $\mathcal{F}_1$, der Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ und der oberen Deckfläche $\mathcal{F}_3$.

Die Bodenfläche $\mathcal{F}_1$ können wir durch die Parametrisierung $\vec{r}(u,v) := (u\cos v, u \sin v, 0)$ mit $(u,v) \in U := [0,1] \times [0, 2\pi]$ darstellen. Es gilt

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u\cos^2 v + u \sin^2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich $\vec{N} = (0,0,-1)$ als äußere Einheitsnormale. (Man teilt $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ durch die Norm $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|$ und wählt dann noch das Vorzeichen so, dass der Vektor nach außen weist.) Also ist $\iint_{\mathcal{F}_1} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do = 0$, denn

$$(\vec{v} \cdot \vec{N})\big(\vec{r}(u,v)\big) = -v_3\big(\vec{r}(u,v)\big) = 0.$$

Die Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ wird durch $\vec{r}(u,v) := (\cos u, \sin u, v)$ mit $(u,v) \in U := [0,2\pi] \times [0,1]$ parametrisiert. Wir erhalten

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist auch schon die äußere Einheitsnormale $\vec{N}$. Also:

$$\big(\vec{v} \cdot \vec{N}\big)\big(\vec{r}(u,v)\big) = \begin{pmatrix} \cos^3 u \\ \cos^2 u \, \sin u \\ v \cos^2 u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} = \cos^4 u + \cos^2 u \, \sin^2 u = \cos^2 u \,.$$

Damit folgt

$$\iint\limits_{\mathcal{F}_2} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do = \iint\limits_{U} \cos^2 u \, \underbrace{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}_{=1} \, d(u,v) = \int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{1} \cos^2 u \, dv \, du = \int_0^{2\pi} \cos^2 u \, du = \pi \,.$$

Es bleibt noch die Deckfläche $\mathcal{F}_3$: Die Parametrisierung $\vec{r}(u,v) := (u\cos v, u \sin v, 1)$ mit $(u,v) \in U := [0,1] \times [0,2\pi]$ liefert $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (0,0,u)$. Es ist $\vec{N} = (0,0,1)$ und damit

$$\big(\vec{v} \cdot \vec{N}\big)\big(\vec{r}(u,v)\big) = v_3\big(\vec{r}(u,v)\big) = u^2 \cos^2 v \,.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathcal{F}_3} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do &= \iint\limits_{U} u^2 \cos^2 v \, \underbrace{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}_{=u} \, d(u,v) = \int_{u=0}^{1} \int_{v=0}^{2\pi} u^3 \cos^2 v \, dv \, du \\ &= \left(\int_0^1 u^3 \, du \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 v \, dv \right) = \tfrac{1}{4}\pi \,. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich schließlich

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do = \sum_{k=1}^{3} \iint\limits_{\mathcal{F}_k} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do = 0 + \pi + \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{5}{4}\pi \,.$$

b) Nach dem Gaußschen Integralsatz ist

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do = \iiint\limits_{Z} (\nabla \cdot \vec{v}\,) \, d(x,y,z) \,;$$

nun gilt $\nabla \cdot \vec{v} = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$, und mit $G := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \,\}$ folgt

$$= \iint\limits_{(x,y) \in G} \int_{z=0}^{1} 5x^2 \, dz \, d(x,y) = \iint\limits_{(x,y) \in G} 5x^2 \, d(x,y) \,;$$

mit Polarkoordinaten erhalten wir

$$= \int_{r=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} 5r^2 \cos^2 \phi \, r \, d\phi \, dr = 5 \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi \right) = \tfrac{5}{4}\pi \,.$$

Aufgabe 6 Wir berechnen zunächst die Volumina der beiden Mengen: Die Menge

$$M = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \tfrac{1}{16}x^2 + \tfrac{1}{8}y^2 + z^2 \le 1 \,\}$$

ist ein Ellipsoid, und es gilt $M = \vec{\psi}(K)$ für

$$K := \{\, (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \le 1 \,\}\,, \qquad \vec{\psi}(u,v,w) := (4u, \sqrt{8}\,v, w)\,.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt: $I(K) = \frac{4}{3}\pi$. Wegen

$$\det \vec{\psi}\,'(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4\sqrt{8} = 8\sqrt{2}$$

liefert die Substitutionsregel also

$$I(M) = \iiint\limits_{\vec{\psi}(K)} 1\, d(x,y,z) = \iiint\limits_{K} 1 \cdot |8\sqrt{2}|\, d(u,v,w) = 8\sqrt{2}\ I(K) = \tfrac{32}{3}\sqrt{2}\,\pi\,.$$

Für die neue Marzipankartoffel ergibt sich

$$\begin{aligned} I(\widetilde{M}) &= \int_{x=-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{y=-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{z=-\sqrt{3-x^2}\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-x^2}\sqrt{3-y^2}} 1\, dz\, dy\, dx \\ &= \int_{x=-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{y=-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2\sqrt{3-x^2}\sqrt{3-y^2}\, dy\, dx \\ &= 2\Big(\int_{x=-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\, dx\Big)\Big(\int_{y=-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-y^2}\, dy\Big) = 2\Big(\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\, dx\Big)^2; \end{aligned}$$

mit der Substitution $x = \sqrt{3}\,t$, $dx = \sqrt{3}\,dt$ folgt

$$= 2\Big(\int_{-1}^{1} \sqrt{3-3t^2} \cdot \sqrt{3}\, dt\Big)^2 = 18\Big(\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt\Big)^2,$$

und die Substitution $t = \sin\tau$, $dt = \cos\tau\, d\tau$ liefert

$$= 18\Big(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\tau}\, \cos\tau\, d\tau\Big)^2 = 18\Big(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\tau\, d\tau\Big)^2.$$

Wegen $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\tau\, d\tau = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\tau\, d\tau = \frac{\pi}{2}$ folgt $I(\widetilde{M}) = \frac{9}{2}\pi^2$.

Nun gilt es noch festzustellen, ob der Quotient $I(\widetilde{M})/I(M)$ größer oder kleiner als das Preisverhältnis 0,97 ist. Statt zum neumodischen Taschenrechner zu greifen, zeigen wir $I(\widetilde{M})/I(M) < 0{,}97$ allein durch Verwendung der Abschätzungen $\pi < 3{,}2$ und $\sqrt{2} > 1{,}4$.

$$\frac{I(\widetilde{M})}{I(M)} = \frac{\frac{9}{2}\pi^2}{\frac{32}{3}\sqrt{2}\,\pi} = \frac{27\pi}{64\sqrt{2}} < \frac{27 \cdot 3{,}2}{64 \cdot 1{,}4} = \frac{27}{28} = 1 - \frac{1}{28} = 1 - \frac{3}{84} < 1 - \frac{3}{100} = 0{,}97$$

Also: Wir kaufen die bewährte Marzipankartoffel, da wir auf diese Weise pro Geldeinheit mehr Volumen bekommen.