(weiter HM I, Kap 20, Abschnitt 20.3)

Beispiele: 1) Der Raum P aller Polynome ist unendlich-dimensional. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind $1, t, t^2, \ldots, t^n$ in P l.u.

2) $\mathcal{L} := \{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid f''(x) - 2f'(x) - 3f(x) = 0, x \in \mathbb{R}\}$ ist ein 2-dim VR. Eine Basis für $\mathcal{L}$ ist e^{-x}, e^{3x}

20.4 Ergänzungen

Satz 3: Ein lineares homogenes Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{\ell j} x_j = 0 \quad , \ell = 1, \ldots, m$$

von m Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ besitzt im Fall $m < n$ stets eine nichttriviale Lösung (das ist ein Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \vec{0}$).

Folgerungen: Satz 4: In einem n ($n \geq 1$)-dimensionalen VR sind je $n+1$ Vektoren l.a.

Satz 5: In einem n-dim VR V gelten:

1. Jede Menge l.u. Vektoren ist Teilmenge einer Basis.
2. Jede Menge von n l.u. Vektoren von V ist eine Basis von V.

20.5 Definition: Es sei V ein VR. Eine Funktion

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C} \qquad (u, v) \to \langle u, v \rangle$$

heißt Skalarprodukt auf V, falls erfüllt sind:

$$\left.\begin{array}{ll} S1 & \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \\ S2 & \langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle \\ S3 & \alpha \langle u, v \rangle = \langle \alpha u, v \rangle \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall u, v, w \in V \\ \forall \alpha \in \mathbb{C} \end{array}$$

S4 $\quad \langle u, u \rangle > 0 \quad \forall u \in V, u \neq 0$.

Ein komplexer (reeller) VR mit einem Skalarprodukt heißt unitärer (euklidischer) VR.

Beispiele:

1) $\mathbb{C}^n$ ist mit $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \vec{x} \cdot \vec{y} := \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$ Dieses Skalarprodukt heißt auch Standardskalarp.

$\left(\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right)$ ein unitärer VR.

Für $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in \mathbb{C}^n$ mit $\vec{e}_k = (\delta_{kj})_{j=1,\dots,n}$ gilt

$$\vec{e}_j \cdot \vec{e}_l = \delta_{jl}.$$

2) $C^0[0,1] = \{ f \mid f : [0,1] \to \mathbb{C}, \text{ stetig} \}$ ist mit

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)}\, dx$$

ein unitärer VR.

3) Im Raum $C_{2\pi} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f \text{ stetig, } 2\pi\text{-periodisch} \}$ werden wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \overline{g(x)}\, dx$$

verwenden. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $e_k(x) := e^{ikx}$. Es ist $e_k \in C_{2\pi}$. Es gilt $\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{kj}$.

4) Ü: In einem unitären VR V mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gilt:

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j, \sum_{k=1}^{m} \beta_k w_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \alpha_j \overline{\beta_k} \langle u_j, w_k \rangle.$$

für $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{C}, u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m \in V$.

5) Ü: Definiere für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^2$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$$

Hierdurch wird auf dem $\mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt def.

20.6 Längen, Winkel

1. In einem unitären VR $(V, <\cdot,\cdot>)$ heißen
$$\|u\| := \sqrt{<u,u>}, \quad u \in V$$ Norm (Länge) von u

und $\|u-v\|$ der Abstand zwischen u, v.
(in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sind das die euklidische Länge und der euklidische Abstand)

Satz 6 In $(V, <\cdot,\cdot>)$ mit $\|u\| = \sqrt{<u,u>}$ hat $\|\cdot\|$ die folgenden Eigenschaften:

N1 $\|u\| \geq 0 \quad \forall u \in V$ und $\|u\| = 0$ nur für $u = 0$.

N2 $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\| \quad (\alpha \in \mathbb{C}, u \in V)$

N3 $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (u, v \in V)$

Bemerkungen: 1) Ist V euklidisch, so: $<u,v> = 0 \Leftrightarrow \|u+v\| = \|u-v\|$

2) Aus $<u,v> = 0$ folgt: $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

(dies folgt aus $\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 \pm 2\operatorname{Re}<u,v> + \|v\|^2$)

2. Satz 7 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) (HMI/Kap 6, Satz 4, S. 16)
In einem unitären Raum $(V, <\cdot,\cdot>)$ gilt

(C) $\quad |<u,v>| \leq \|u\| \, \|v\| \quad \forall u, v \in V$

Es gilt "=" genau, wenn u, v l. a. sind.

Hiermit wird die folgende Definition sinnvoll:
$(V, <\cdot,\cdot>)$ sei ein euklidischer VR. $u, v \in V \setminus \{0\}$.
Die durch
$$\cos\theta := \frac{<u,v>}{\|u\| \, \|v\|} \qquad \text{(W)}$$

definierte Zahl $\theta \in [0, \pi]$ heißt der Winkel zwischen u und v. (Im $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt ist das anschaulich der Winkel zwischen $\vec{u}, \vec{v}$)

$(V, <\cdot,\cdot>)$ ein unitärer VR. $u, v \in V$.
<u>u heißt orthogonal zu v</u>: $u \perp v \overset{Def}{\Longleftrightarrow} <u,v> = 0$

Siehe oben <u>20.6</u>, <u>1.</u> Bemerkung 1)

$$u \perp v \Longleftrightarrow \|u+v\| = \|u-v\|$$ (im euklid.

und 2) Im unitären Raum gilt der Satz des Pythagoras:

$$u \perp v \Longrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

<u>2.</u> Für $S \subset V$ wird definiert: $S^\perp = \{ v \in V \,/\, <v,s> = 0 \}$
$S^\perp$ ist ein Teilraum von V.

<u>3.</u> Ein <u>Orthonormalsystem (ONS) X</u> in einem unitären VR $(V, <\cdot,\cdot>)$ ist eine Menge $X \subset V$ mit:

1) $\|u\| = 1 \quad \forall u \in X$, 2) $<u,v> = 0 \quad \forall u,v \in X, u$

Beispiele: Im $\mathbb{C}^n$ ist $\{\vec{e}_k, k = 1,\dots,n\}$ ein ONS
(bzgl. des Standardskalarprodukts)
Im $C_{2\pi}$ (hier S. 2) ist $\{e_k, k \in \mathbb{Z}\}$ ein ONS
(mit dem dort definierten Skalarprodukt)

<u>Satz 8</u> Je endlich viele Elemente eines ONS in einem unitären VR $(V, <\cdot,\cdot>)$ sind l.u.

$\Rightarrow$: Jedes ONS aus n Elementen in einem unitären n-dim VR ist eine Basis: eine ON-Basis.

<u>Satz 9</u> In einem n-dim VR $(V, <\cdot,\cdot>)$ gibt es eine ON-Basis.

Der Beweis ist konstruktiv (<u>das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren</u>)

Man geht aus von einer Basis $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von V und konstruiert sukzessive eine ON-Basis $(y_1, \ldots, y_n)$ wie folgt:

$y_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Hat man $y_1, \ldots, y_r$ schon konstruiert, so erhält man y_{r+1} so: $y_{r+1} := \frac{z}{\|z\|}$

mit $z := x_{r+1} - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j y_j$. Die α_j werden aus den Forderungen $\langle z, y_l \rangle = 0$, $l = 1, \ldots, r$ zu

$\alpha_j = \langle x_{r+1}, y_j \rangle$ bestimmt.

<u>Ergebnis</u>:

$$(R)\begin{cases} y_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|} \\ y_{r+1} = \dfrac{x_{r+1} - \sum_{j=1}^{r} \langle x_{r+1}, y_j \rangle y_j}{\| x_{r+1} - \sum_{j=1}^{r} \langle x_{r+1}, y_j \rangle y_j \|}, \quad r = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

<u>Bemerkungen</u>: 1) Machen Sie sich dies im Anschauungsraum $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ klar, womit dann auch die folgende Bezeichnung gerechtfertigt ist:

2) $\sum_{j=1}^{r} \langle x_{r+1}, y_j \rangle y_j$ ist die orthogonale Projektion von x_{r+1} auf $\mathrm{Lin}(y_1, \ldots, y_r)$

3) Das Verfahren oben liefert die $y_1, y_2, \ldots$ mit folgender Eigenschaft:

$\mathrm{Lin}(x_1, \ldots, x_j) = \mathrm{Lin}(y_1, y_2, \ldots, y_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$

Begründen Sie dies mit obiger Rekursion <u>(R)</u>.

20.8 Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) im $\mathbb{R}^3$

Def: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + y_3\vec{e_3}$

wird der Vektor $\vec{x} \times \vec{y} := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$ zugeordnet.

$\vec{x} \times \vec{y}$ heißt <u>Vektorprodukt</u> von $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

<u>Satz 10</u> (Eigenschaften des Vektorprodukts)

Für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten:

1. $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$ $(\rightarrow \vec{x} \times \vec{x} = \vec{0})$
2. $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$, $(\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z}$
3. $(\alpha\vec{x}) \times \vec{y} = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{x} \times (\alpha\vec{y})$
4. $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{0}$
5. $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}$

   $\rightarrow (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = ?$ Ü
6. $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x}$, $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{y}$
7. $\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$
8. $\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3}$, $\vec{e_2} \times \vec{e_3} = \vec{e_1}$, $\vec{e_3} \times \vec{e_1} = \vec{e_2}$

Begründung: Nachrechnen mit der Definition.
Einfach aber teilweise aufwendig. Ü

<u>Folgerungen, Ergänzungen.</u>

1. Verwendet man Satz 10, 7. und (W1, S.3), so sieht man

$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \measuredangle(\vec{x}, \vec{y})$ ($\measuredangle(\vec{x}, \vec{y})$: Winkel zwischen $\vec{x}, \vec{y}$)

= Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten $\vec{x}, \vec{y}$

2. $\vec{x} \times \vec{y} \neq \vec{0} \iff \vec{x}, \vec{y}$ sind l.u.

3. $|(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}| = \|\vec{x} \times \vec{y}\| \, \|\vec{z}\| \cos(\sphericalangle(\vec{x} \times \vec{y}, \vec{z}))$

Volumen des Spats mit den Kanten $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

4. $$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1 - x_1 y_3 z_2$$

heißt Spatprodukt.

Satz 11 (Eigenschaften des Spatproduktes)

1. $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) \; (=: (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}))$
2. $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) = (\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}) = -(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z})$
   $= -(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}) = -(\vec{x}, \vec{z}, \vec{y})$
3. Für $\vec{x}, \vec{x}', \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten:
   $(\alpha \vec{x} + \beta \vec{x}', \vec{y}, \vec{z}) = \alpha (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + \beta \langle \vec{x}', \vec{y}, \vec{z} \rangle$
   (formuliere eine analoge Regel für die Stelle, an der $\vec{y}$ ($\vec{z}$) steht).
4. Stimmen bei $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ zwei Vektoren überein,
   so: $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = 0$
5. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$
6. $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}) = \|\vec{x} \times \vec{y}\|^2$

Nachrechnen. Übung. Einfach aber ermüdend.