Def: $\vec{f}: S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt <u>in S partiell diff'bar</u>, falls $(D_k f_j)(\vec{x})$ für $k=1,\dots,n$, für $j=1,\dots,m$ und für alle $\vec{x} \in S$ existieren. Sind die Funktionen $D_k f_j \;\forall k, \forall j$ auf S stetig, so heißt <u>$\vec{f}$ auf S stetig partiell diff'bar</u>.

Die (m,n)-Matrix $\quad ((D_k f_j)(\vec{x}))_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}}$

mit der Spaltenform $[D_1\vec{f}(\vec{x}), D_2\vec{f}(\vec{x}), \dots, D_n\vec{f}(\vec{x})]$ heißt <u>Funktional- oder Jacobi-Matrix von $\vec{f}$ an der Stelle $\vec{x}$</u>; sie wird durch <u>$J_{\vec{f}}(\vec{x})$</u> bezeichnet. Im Fall $m=n$ heißt $\det(J_{\vec{f}}(\vec{x}))$ <u>die Funktionaldeterminante von $\vec{f}$ an der Stelle $\vec{x}$</u>.

<u>Beispiele:</u> 1) $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad : \vec{f}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$,

$r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (<u>ebene Polarkoordinaten</u>)

<u>$\det(J_{\vec{f}}(r,\varphi)) = r.$</u>

2) $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{f}(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} r \geq 0 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \end{matrix}$

(<u>Kugelkoordinaten / räumliche Polarkoordinaten</u>)

<u>$\det(J_{\vec{f}}(r,\varphi,\vartheta)) = r^2\cos\vartheta.$</u>

Def: $\vec{f}$ heißt auf S <u>k mal (stetig) partiell diff'bar</u>, falls auf S die Ableitungen <u>$D_1^{j_1} D_2^{j_2} \cdots D_n^{j_n} \vec{f}$</u> für alle $j_1,\dots,j_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $j_1 + j_2 + \dots + j_n \leq k$ existieren (und stetig sind).

Satz 1 (Schwarz)

Ist $\vec{f}: S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zweimal stetig partiell diff'bar, so gilt $D_k D_j \vec{f} = D_j D_k \vec{f}$ auf S für alle $k, j \in \{1, \dots, n\}$.

3. $\nabla = \begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix}$ wirkt als Vektordifferentialoperator

auf Skalarfelder $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bzw Vektorfelder $\vec{v}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ so:

$$\nabla f(\vec{x}) = \operatorname{grad} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} D_1 f(\vec{x}) \\ D_2 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ D_n f(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{v}(\vec{x}) \; (= \nabla^T \vec{v}(\vec{x})) = \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} D_j v_j(\vec{x})$$

$$n = 3: \nabla \times \vec{v}(\vec{x}) = \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} D_2 v_3(\vec{x}) - D_3 v_2(\vec{x}) \\ D_3 v_1(\vec{x}) - D_1 v_3(\vec{x}) \\ D_1 v_2(\vec{x}) - D_2 v_1(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$$\Delta f(\vec{x}) = \nabla^T (\nabla f)(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} D_j^2 f(\vec{x}) \quad (= \operatorname{div} \operatorname{grad} f)$$

$$\Delta \vec{v}(\vec{x}) = (\nabla^T \nabla) \vec{v}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} D_j^2 \vec{v}(\vec{x})$$

Δ: Laplace Operator

Beispiele 1) $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$: $\nabla f(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$

2) $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$: $(\nabla^T \vec{v})(\vec{x}) = n$

Im Fall $n = 3$: $(\nabla \times \vec{v})(\vec{x}) = \vec{0}$

3) $f(\vec{x}) = g(\|\vec{x}\|)$: $\nabla f(\vec{x}) = g'(\|\vec{x}\|) \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$

4) (Produktregeln)

$f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\qquad \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \vec{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: $\quad \nabla^T(f\vec{v}) = f\nabla^T\vec{v} + (\nabla f)^T\vec{v}$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: $\quad \nabla \times (f\vec{v}) = f\nabla\times\vec{v} + (\nabla f)\times\vec{v}$

5) $\vec{v}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \quad : (\nabla^T\vec{v})(\vec{x}) = \frac{n-1}{\|\vec{x}\|}$

$f(\vec{x}) = \|\vec{x}\| \quad : (\Delta f)(\vec{x}) = \frac{n-1}{\|\vec{x}\|}$

$g(\vec{x}) = f(\|\vec{x}\|) : (\Delta g)(\vec{x}) = f''(\|\vec{x}\|) + f'(\|\vec{x}\|)\frac{n-1}{\|\vec{x}\|}$

Satz 2 $\quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien zweimal stetig diff'bar. Es gelten:

$$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}, \quad \nabla^T(\nabla \times \vec{v}) = 0,$$
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla^T\vec{v}) - \Delta\vec{v}.$$

Bemerkung: Ein stetiges Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heißt Potentialfeld, falls es ein ~~stetig~~ partiell diff'bares Potential $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \nabla f$ gibt.

Satz 2 $\to$ Für ein einmal stetig partiell diff'bares Potentialfeld $\vec{v}$ gilt $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$.

22.5 $\quad \vec{f} : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Die Ableitung in $\vec{x}_0 \in S$.

1. Def: $S \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, $\vec{x}_0 \in S$. $\vec{f} : S \to \mathbb{R}^m$ heißt in $\vec{x}_0$ diff'bar, falls es eine (m,n)-Matrix A so gibt, dass
$$\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + A\vec{h} + \vec{R}(\vec{h})$$ gilt mit $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{R}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$.

A heißt die Ableitung von $\vec{f}$ an der Stelle $\vec{x}_0$. Wir schreiben $\vec{f}'(\vec{x}_0)$ für A.

2. <u>Satz 1</u> Ist $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$ diff'bar, so existiert $D_{\vec{v}}\vec{f}(\vec{x}_0)$ für jedes $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Es gilt

$$\vec{f}'(\vec{x}_0)\vec{v} = (D_{\vec{v}}\vec{f})(\vec{x}_0).$$

<u>Folgerung:</u> Ist $\vec{f}$ auf S diff'bar, so gilt

$$\underline{\vec{f}'(\vec{x}) = J_{\vec{f}}(\vec{x})} \text{ für jedes } \vec{x} \in S.$$

<u>Def:</u> Ist $\vec{f}'\left\{\begin{matrix}\text{in } \vec{x}_0\\ \text{auf } S\end{matrix}\right.$ stetig, so heißt <u>$\vec{f}\left\{\begin{matrix}\text{in } \vec{x}_0\\ \text{auf } S\end{matrix}\right.$ stetig diff'bar</u> ($\Leftrightarrow \vec{f}$ ist $\left\{\begin{matrix}\text{in } \vec{x}_0\\ \text{auf } S\end{matrix}\right.$ einmal stetig partiell diff'bar / Def S.53 oben). Schreibweise: $\vec{f} \in C^1(S)$

<u>Satz 2</u> Ist $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$ stetig diff'bar, so ist $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$ diff'bar.

Aus <u>Satz 1</u> folgt weiter für diff'bares $\vec{f}: S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\underline{(D_{\vec{v}}\vec{f})(\vec{x}) = (\vec{v}^T\nabla)\vec{f}(\vec{x})} \left(= \sum_{j=1}^{n}(v_j D_j)\vec{f}(\vec{x})\right)$$

Im Fall $m=1$ kann dies so geschrieben werden:

$$\underline{(D_{\vec{v}}f)(\vec{x}) = \vec{v}^T\nabla f(\vec{x})}$$

Hieraus folgt:

$$\max\{D_{\vec{v}}f(\vec{x}),\ \|\vec{v}\|=1\} = \|\nabla f(\vec{x})\|$$
$$\min\{D_{\vec{v}}f(\vec{x}),\ \|v\|=1\} = -\|\nabla f(\vec{x})\|$$

und mit $\vec{v}_{max} := \dfrac{\nabla f(\vec{x})}{\|\nabla f(\vec{x})\|}$ und $\vec{v}_{min} := -\dfrac{\nabla f(\vec{x})}{\|\nabla f(\vec{x})\|}$

gelten: $D_{\vec{v}_{max}}f(\vec{x}) = \|\nabla f(\vec{x})\|$, $D_{\vec{v}_{min}}f(\vec{x}) = -\|\nabla f(\vec{x})\|$

<u>Satz 3</u> Es sei $f: S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aus C^1. Gilt für $\vec{x}_0 \in S$ $\nabla f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$, so hat man $\nabla f(\vec{x}_0)$ $(-\nabla f(\vec{x}_0))$ weist in die Richtung, in der f am schnellsten wächst (am stärksten fällt).

3. <u>Satz 4</u> (Kettenregel)

Es seien $\vec{g}: U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ in $\vec{x}$ diff'bar und

$\vec{f}: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in $\vec{g}(\vec{x}) \in V$ diff'bar.

Dann ist $\vec{f} \circ \vec{g}: U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ in $\vec{x}$ diff'bar.

Es gilt $(\vec{f} \circ \vec{g})'(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{g}(\vec{x}))\, \vec{g}'(\vec{x})$

(oder: $J_{\vec{f} \circ \vec{g}}(\vec{x}) = J_{\vec{f}}(\vec{g}(\vec{x}))\, J_{\vec{g}}(\vec{x})$).

(Ü: Schreibe die einzelnen Elemente der Matrix $J_{\vec{f} \circ \vec{g}}(\vec{x})$ explizit mit Koordinaten auf)

<u>Beispiel</u>:

$\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ seien diff'bar.

$\to \vec{h} := \vec{f} \circ \vec{r}$ ist diff'bar. Es gilt

$\underline{(*)}$ $\quad \vec{h}'(t) = (D_{\vec{r}'(t)} \vec{f})(\vec{r}(t))$.

Es sei $n = 3$, $m = 1$. Durch $f(x,y,z) = k$ (Konst) mit $\nabla f \neq \vec{0}$ wird im $\mathbb{R}^3$ implizit eine Fläche F gegeben. Die Kurve C: $\vec{r} = \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ verlaufe in F, d. h.

$$h(t) := f(\vec{r}(t)) = k \quad \forall t \xrightarrow{(*)} \vec{r}'(t)^T \nabla f(\vec{r}(t)) = 0$$

Das gilt für jede Kurve auf F. Es sei $P \in F$ mit Ortsvektor $\vec{r}_0$, also $f(\vec{r}_0) = k$. Dann ist $\nabla f(\vec{r}_0)$ ein Normalenvektor für jede Kurve in F durch P:

Satz 5 Die Punkte mit den Ortsvektoren $\vec{r}$, die der Gleichung $(\vec{r}-\vec{r}_0)^T \nabla f(\vec{r}_0) = 0$ genügen, bilden die Tangentialebene an F in P.

1) Ist $F \subset \mathbb{R}^3$ explizit, etwa durch $z = g(x,y)$, gegeben, so wird $z = g(x,y) \Longleftrightarrow f(x,y,z) = z - g(x,y) = 0$, und Satz 5 liefert die Gleichung der Tangentialebene in der Form: $z = z_0 + (x-x_0)D_1 g(x_0,y_0) + (y-y_0)D_2 g(x_0,y_0)$.

2) Ist $F \subset \mathbb{R}^3$ in Parameterdarstellung $\vec{r} = \vec{f}(u,v)$, $\vec{f}: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben, so erhält man eine Gleichung der Tangentialebene an F in $\vec{r}_0 = \vec{f}(u_0,v_0)$ in:

$$\vec{T}(\lambda,\mu) = \vec{r}_0 + \lambda (D_1\vec{f})(u_0,v_0) + \mu (D_2\vec{f})(u_0,v_0), \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

Dies ist eine Ebene, falls $D_1\vec{f}(u_0,v_0) \times D_2\vec{f}(u_0,v_0) \neq \vec{0}$.