22.6 Taylorsatz

1. Vor: $f: S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei aus $C^{k+1}(S)$, S sei offen. $\vec{x}, \vec{x}_0$ und $\vec{r}(t) = \vec{x}_0 + t(\vec{x} - \vec{x}_0)$, $0 \le t \le 1$, liegen in S.

Bilde $F(t) := (f \circ \vec{r})(t)$ mit $F'(t) = (D_{\vec{x}-\vec{x}_0} f)(\vec{r}(t))$, $F(0) = f(\vec{x}_0)$, $F(1) = f(\vec{x})$. Hiermit gibt die Taylorentwicklung von $F(1)$ um 0 (gemäß HMI / Satz 1 / S.65) die Taylorformel für $f(\vec{x})$ um $\vec{x}_0$:

$$\underline{(T)} \quad f(\vec{x}) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \underbrace{\Big(\sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_n = j \\ j_\ell \in \mathbb{N}\cup\{0\}}} \frac{1}{j_1!\, j_2! \cdots j_n!} (\partial_1^{j_1} \cdots \partial_n^{j_n} f)(\vec{x}_0)\, (x_1 - x_1^0)^{j_1} \cdots (x_n - x_n^0)^{j_n} \Big)}_{= \frac{1}{j!} ((\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot\nabla)^j f(\vec{x}_0) = \frac{1}{j!} (D^j_{\vec{x}-\vec{x}_0} f)(\vec{x}_0)}}_{= T_k(f, \vec{x}_0)(\vec{x}) \text{ (k-tes Taylorpolynom)}} + R_{k+1}$$

mit dem Restterm
$$R_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1}_{\vec{x}-\vec{x}_0} f(\vec{x}_0 + \vartheta(\vec{x}-\vec{x}_0))$$
$$= o(\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^k) \qquad (\vec{x} \to \vec{x}_0)$$

mit einem $\vartheta \in (0,1)$.

Zur Ableitung der obigen Form von $\underline{(T)}$ haben wir die folgende Formel hergeleitet:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^j = \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_n = j \\ (j_\ell \in \mathbb{N}\cup\{0\})}} \frac{j!}{j_1!\, j_2! \cdots j_n!} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}.$$

($j \in \mathbb{N}$, $x_\ell \in \mathbb{R}$). $\underline{Ü}$: Schreibe dies für $n=2$ und $j=2,3$ auf!

2\. 1) Im Fall $n=1$ ist (T) die Taylorformel aus HM I: $f(x)=\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}f^{(j)}(x_0)(x-x_0)^j+\frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi)(x-x_0)^{k+1}$

wobei ξ zwischen x und x_0 liegt.

2) Für $k=0$, n ist das der Mittelwertsatz:

$$f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)=\nabla f(\vec{\xi})\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

$$(\vec{\xi}=\vec{x}_0+\vartheta(\vec{x}-\vec{x}_0) \text{ mit einem } \vartheta\in(0,1))$$

<u>Folgerung</u>: Ist $f: S\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, S offen und zusammenhängend, aus $C^1(S)$, so gilt:

$$f(\vec{x})=\text{const},\ \vec{x}\in S \iff \nabla f(\vec{x})=\vec{0},\ \vec{x}\in S$$

3) $T_0(f,\vec{x}_0)(\vec{x})=f(\vec{x}_0)$

$T_1(f,\vec{x}_0)(\vec{x})=f(\vec{x}_0)+\nabla f(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)$

(für $n=2$ ist das die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z=f(x,y)$ in $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$)

$$T_2(f,\vec{x}_0)(\vec{x})=T_1(f,\vec{x}_0)(\vec{x})+\frac{1}{2}\underbrace{((\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot\nabla)^2f(\vec{x}_0)}_{(*)}$$

(*): $((\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot\nabla)^2f(\vec{x}_0)=(\vec{x}-\vec{x}_0)^T H_f(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0)$, wobei $H_f(\vec{x}_0)$ die symmetrische (n,n)-Matrix mit

$(H_f(\vec{x}_0))_{jk}=D_jD_kf(\vec{x}_0)$ $(j,k=1,\dots,n)$ ist.

$H_f(\vec{x}_0)$ heißt <u>die Hesse Matrix von f an der Stelle $\vec{x}_0$</u>.

Für späteres Zitieren setzen wir in (T) bis zur 2. Ordnung

$\vec{x}$ durch $\vec{x}+\vec{x}_0$ und erhalten für $f \in C^3$:

$$(T_2) \quad \underline{f(\vec{x}_0+\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)\cdot\vec{x} + \left(\tfrac{1}{2}\vec{x}^T H_f(\vec{x}_0)\vec{x} + o(\|\vec{x}\|^2)\right)} \quad \vec{x}\to\vec{0}.$$

<u>3.</u> Bildet man in (T) $\lim_{k\to\infty}$, so erhält man, falls $f \in C^\infty$ gilt, für die $\vec{x}$, für die $R_{k+1} \to 0$ $(k\to\infty)$ erfüllt ist, <u>die Taylorreihe von f an der Stelle $\vec{x}$ um $\vec{x}_0$</u>:

$$\left(T(f,\vec{x}_0)(\vec{x}) = \right) f(\vec{x}) = \sum_{j_1,j_2,\dots,j_n=0}^{\infty} c_{j_1\dots j_n}(x_1-x_1^0)^{j_1}\cdots(x_n-x_n^0)^{j_n}$$

mit $c_{j_1\dots j_n} = \dfrac{1}{j_1!\,j_2!\cdots j_n!}\,\partial_1^{j_1}\partial_2^{j_2}\cdots\partial_n^{j_n} f(\vec{x}_0)$.

1) Entwicklung von $f(x,y) = e^{x+y} + \sin(xy)$ bis zur 3. Ordnung:

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(x+y)^j + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}(xy)^{2k+1}$$

$$= 1 + (x+y) + \tfrac{1}{2}(x+y)^2 + \tfrac{1}{3!}(x+y)^3 + xy$$

$$- \tfrac{1}{3!}x^3y^3 + o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\right) \quad ((x,y)\to(0,0))$$

$=$ Ausmultiplizieren und nach Potenzen $x^{j_1}y^{j_2}$ sortieren.

2) Entwicklung von $f(x,y) = x^2-y^2$ um $(1,2)$:

$$f(x,y) = -3 + 2(x-1) - 4(y-2) + (x-1)^2 - (y-2)^2$$

Man liest ab, etwa $H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

22.7 Extremwerte für $f: S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Stationäre Stellen.

1. Es sei $f: S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, S offen, gegeben. Es sei $\vec{x}_0 \in S$.

$(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$ ist lokales Maximum (Minimum) von f, falls es eine Kugel $B(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in S \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\} \subset S$ so gibt, dass $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ $(\geq f(\vec{x}_0))$ gilt für alle $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, r)$. Gilt $<$ $(>)$ $\forall\ \vec{x} \in B(\vec{x}_0, r) \setminus \{\vec{x}_0\}$, so heißt der Extremwert eigentlich (isoliert, strikt).

Beisp: $f(x,y) = x^2 + y^2$ besitzt auf $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ in $(0,0)$ ein isoliertes absolutes Minimum. f besitzt auf S kein Maximum.

Satz 1 Ist f in einer Umgebung $U = B(\vec{x}_0, r) \subset S$ von $\vec{x}_0$ diff'bar und besitzt f in $\vec{x}_0$ ein lokales Extremum, so gilt $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

Def: Ein Punkt $\vec{x}_0 \in S$ mit $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$ heißt stationärer (kritischer) Punkt von f.

(Satz 1 besagt: Dort, wo f diff'bar ist, sind die Punkte, in denen f extremal wird, unter den stationären Punkten zu suchen.)

Def: $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$, $\vec{x}_0 \in S$, heißt Sattelpunkt von f, wenn $\vec{x}_0$ stationär ist und wenn in jeder Umgebung von $\vec{x}_0$ Punkte $\vec{u}, \vec{v} \in S$ liegen mit $f(\vec{u}) (\leq) f(\vec{x}_0) (\leq) f(\vec{v})$.

2. Unter Verwendung von (T_2) (S.61 oben und mit Abschnitt 20.16 (S.38,39 erhält man

Satz 2 Es sei $f \in C^2(S)$, $S \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\vec{x}_0 \in S$ ein stationärer Punkt von f. Dann gelten:

a) Ist $H_f(\vec{x}_0)$ positiv (negativ) definit, so ist $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$ ein eigentliches lokales Minimum (Maximum).

b) Ist $H_f(\vec{x}_0)$ indefinit, so liegt bei $\vec{x}_0$ ein Sattelpunkt von f

c) Ist $H_f(\vec{x}_0)$ semidefinit, so ist keine allgemeine Aussage hinsichtlich Extremum oder Sattelpunkt möglich.

Für c) haben wir die Funktionen $f_1(x,y) = x^2+y^4$, $f_2(x,y) = x^2$, $f_3(x,y) = x^2+y^3$ betrachtet, für die $(0,0)$ ein stationärer Punkt ist: $\nabla f_j(0,0) = \vec{0}$ $(j=1,2,3)$ und $H_{f_j}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ semidefinit ist $(j=1,2,3)$.

22.8

1. Satz 1 (Der Satz über die inverse Funktion)

$\vec{f}: S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$, sei eine C^1-Funktion.
Für $\vec{x}_0 \in S$ sei $\vec{f}'(\vec{x}_0) = J_{\vec{f}}(\vec{x}_0)$ eine reguläre Matrix.
Dann gibt es eine offene Umgebung U von $\vec{x}_0$ in S derart, dass: 1. $\vec{f}(U) = V$ ist offene Menge in $\mathbb{R}^n$ und $\vec{f}: U \to V$ ist bijektiv.

2. $\vec{f}^{-1}|_V$ ist stetig diff'bar. Es gilt:

$$(\vec{f}^{-1})'(\vec{y}) = [\vec{f}'(\vec{f}^{-1}(\vec{y}))]^{-1}, \quad \vec{y} \in V.$$

Beispiele: 1. (vgl.) $\vec{f}: S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$S = \{(r,\varphi) \mid r > 0,\ 0 < \varphi < \pi\}$ und

$$\vec{f}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Wegen $\det J_{\vec{f}}(r,\varphi) = r > 0$ ist $\vec{f}'(r,\varphi)$ regulär für alle $(r,\varphi) \in S$. Satz 1 sagt aus: In der Umgebung jedes Punktes $(r,\varphi) \in S$ gibt es stetig diff'bare Funktionen $r = r(x,y)$, $\varphi = \varphi(x,y)$ mit

$$\vec{f}(r(x,y), \varphi(x,y)) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(Hier ist $\vec{f}$ auf ganz S (global) injektiv. Mit $\vec{f}(S) = \{(x,y),\ y > 0\}$ kann man sogar explizit

$$\vec{f}^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \vec{f}(S),$$

angeben.)

2. $\vec{f}: S = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{f}(u,v) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ 2uv \end{pmatrix}$.

Hier ist $J_{\vec{f}}(u,v)$ regulär für $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Satz 1 sagt aus: Zu jedem $(u_0, v_0) \neq (0,0)$ gibt es eine Umgebung, in der $\vec{f}$ injektiv ist, in der es Funktionen $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ mit $x = u^2(x,y) - v^2(x,y)$, $y = 2u(x,y)\,v(x,y)$ gibt.

(Wegen $\vec{f}(u,v) = \vec{f}(-u,-v)$ ist $\vec{f}$ in keiner Menge des $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ injektiv, die mit (u_0,v_0) auch $(-u_0,-v_0)$ enthält.)