## 2. Implizit definierte Funktionen

Es ist $\vec{f}: S \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, $\vec{f} \in C^1$

$\vec{w} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{y})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Es ist

$$\vec{f}\,'(\vec{x},\vec{y}) = \underbrace{[\underbrace{D_1\vec{f}(\vec{x},\vec{y}), \dots, D_n\vec{f}(\vec{x},\vec{y})}_{\substack{=:\, \partial_x \vec{f}(\vec{x},\vec{y}) \\ \text{eine } (m,n)\text{-Matrix}}}, \underbrace{D_{n+1}\vec{f}(\vec{x},\vec{y}), \dots, D_{n+m}\vec{f}(\vec{x},\vec{y})]}_{\substack{=:\, \partial_y \vec{f}(\vec{x},\vec{y}) \\ \text{eine } (m,m)\text{-Matrix}}}}_{\text{eine } (m,\, n+m)\text{-Matrix.}}$$

Es gilt $\vec{f}\,'(\vec{x},\vec{y})(\vec{z}-\vec{z}_0) = \partial_x \vec{f}(\vec{x},\vec{y})(\vec{x}-\vec{x}_0) + \partial_y \vec{f}(\vec{x},\vec{y})(\vec{y}-\vec{y}_0)$

mit $\vec{z}-\vec{z}_0 = \begin{pmatrix} \vec{x}-\vec{x}_0 \\ \vec{y}-\vec{y}_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Lässt sich $\vec{f}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0}$ nach $\vec{y}$ zu $\vec{y} = \vec{h}(\vec{x})$ auflösen, so sagt man, dass durch $\vec{f}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0}$ die Funktion $\vec{h}$ implizit definiert ist.

<u>Satz 2</u> Vor. an $\vec{f}$ und Bezeichnungen wie oben.
Es gibt ein $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in S$ mit:
1) $\vec{f}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$ und 2) $\partial_y \vec{f}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ ist eine reguläre Matrix.

Dann gelten: a) Es gibt Umgebungen $U$ von $\vec{x}_0$ in $\mathbb{R}^n$ und $V$ von $\vec{y}_0$ in $\mathbb{R}^m$ und $\vec{h}: U \to V$, $\vec{y} = \vec{h}(\vec{x})$, mit $\vec{y}_0 = \vec{h}(\vec{x}_0)$ und $\vec{f}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})) = 0$ für alle $\vec{x} \in U$.

b) $\vec{h}$ ist in $U$ stetig diff'bar. Es gilt

$$\vec{h}\,'(\vec{x}) = -\left(\partial_y \vec{f}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x}))\right)^{-1} \partial_x \vec{f}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})), \quad \vec{x} \in U.$$

<u>Beispiel</u>: Zeige, dass

$$\vec{f}(\vec{x},\vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2) \\ f_2( \;\dots\; ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{y_1} + y_2 x_1 - 4x_2 + 3 \\ y_2 \cos y_1 - 6y_1 + 2x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

bei $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = (3,2,7,0,1)$ nach $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \; (= \vec{h}(x_1,x_2,x_3))$

auflösbar ist und dass gilt $\vec{h}'(3,2,7) = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 \\ 10 & -24 & -2 \end{pmatrix}$.

---

## 22.9 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

gegeben sind: Eine stetig diff'bare Funktion

$$f : S \text{ (offen)} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

und ein stetig diff'bares Vektorfeld

$$\vec{g} : S \to \mathbb{R}^m \quad \text{mit } m < n \text{ und}$$

$$\operatorname{rang} \vec{g}'(\vec{x}) = m \quad (\vec{x} \in S).$$

Es sei $M = \{\vec{x} \in S \mid \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

<u>(P)</u> $\left\{\begin{array}{l}\text{Gesucht sind Extremalstellen von } f \text{ unter der} \\ \text{Nebenbedingung, dass sie in } M \text{ liegen. D.h. gesucht} \\ \text{sind Extremalstellen von } f|_M.\end{array}\right.$

<u>Satz</u> $f, \vec{g}, m, n$ seien wie oben und genügen den dort formulierten Voraussetzungen.

Dann gilt: Ist $\vec{x}_0$ Extremalstelle von $f|_M$, so gibt es Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ (Lagrange Multiplikatoren) mit $\nabla f(\vec{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(\vec{x}_0)$.

Vorgehen zur Lösung von (P):

Berechne aus den $n+m$ skalaren Gleichungen

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \nabla g_j(\vec{x}_0) \quad , \quad \vec{g}(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

für die $n+m$ Unbekannten $x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ die Koordinaten $x_1^0, \dots, x_n^0$ von etwaigen Extremalpunkten $\vec{x}_0$. Untersuche den Charakter der berechneten Punkte $\vec{x}_0$: Liegt ein lokales (globales) Max / Min vor oder eventuell etwas anderes?

Beispiele: 1) ($n=4, m=2$) Es ist $f(x,y,u,v) := (x-u)^2 + (y-v)^2$ zu minimieren unter den Nebenbedingungen $(g_1(x,y,u,v) =) x^2+y^2-1=0$, $(g_2(x,y,u,v)=) u+v-4=0$. (Formuliere dieses Problem geometrisch)

2) ($n=3, m=2$) Minimiere $f(x,y,z) = x^2+y^2$ unter den Nebenbedingungen $(g_1(x,y,z) =) z=0$, $(g_2(x,y,z) =) z^2-(y-1)^3=0$.

---

## 23. Kapitel Integration über 2- und 3-dim Bereiche. Kurvenintegrale.

### 23.1 $\iint_G f(x,y)\, d(x,y)$

für beschränkte Gebiete $G \subset \mathbb{R}^2$ mit stückweise glatter Randkurve $\partial G$ und $f \in C^0(\overline{G})$ ($\overline{G} = G \cup \partial G$). Und zwar für Gebiete folgender Formen:

$$G^{(x)} = \{(x,y) \,/\, a(y) < x < b(y),\ \gamma < y < \delta\}$$

$$G^{(y)} = \{(x,y) \,/\, c(x) < y < d(x),\ \alpha < x < \beta\}$$

mit $a, b \in C^1[\gamma, \delta]$, $c, d \in C^1[\alpha, \beta]$, wird definiert:

$$\iint\limits_{G^{(x)}} f(x,y)\,d(x,y) := \int\limits_{y=\gamma}^{\delta} \Big( \int\limits_{x=a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \Big) dy$$

$$\iint\limits_{G^{(y)}} f(x,y)\,d(x,y) := \int\limits_{x=\alpha}^{\beta} \Big( \int\limits_{y=c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \Big) dx$$

<u>Bemerkungen:</u> ( $G = G^{(x)}$ oder $G^{(y)}$ )

1) $\iint\limits_G 1\, d(x,y)$ gibt den Inhalt $I(G)$ von $G$ an

2) Für $f(x,y) \geq 0$ , $(x,y) \in G$, hat man in

$\iint\limits_G f(x,y)\,d(x,y)$ das Volumen $I(K)$ vom

$K = \{(x,y,z) \mid 0 \leq z \leq f(x,y),\ (x,y) \in G\}$

3) Lässt sich $G$ in endlich viele ($N$) Bereiche $G_\nu$ der Typen $G^{(x)}$ oder $G^{(y)}$ disjunkt zerlegen, so wird

$$\iint\limits_G f(x,y)\,d(x,y) := \sum_{\nu=1}^{N} \iint\limits_{G_\nu} f(x,y)\,d(x,y) \text{ definiert.}$$

<u>Satz</u> (Vertauschung der Integrationsreihenfolge)

Falls $\overline{G} = [\alpha,\beta] \times [\gamma,\delta]$ und $f \in C^0(\overline{G})$ gilt, so folgt

$$\iint\limits_G f(x,y)\,d(x,y) = \int\limits_\gamma^\delta \Big( \int\limits_\alpha^\beta f(x,y)\,dx \Big) dy = \int\limits_\alpha^\beta \Big( \int\limits_\gamma^\delta f(x,y)\,dy \Big) dx .$$

Gegenbeispiel: $G = (0,1) \times (0,1)$ und

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{(x+y)^3} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

Beispiel: Flächeninhalt von $G = \{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 < 4\}$

$$\frac{1}{4} I(G) = \int_{x=0}^{1} \left( \int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \right) dx + \int_{x=1}^{2} \left( \int_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} dy \right) dx$$

$$= \text{mit Polarkoordinaten} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left( \int_{r=1}^{2} r\,dr \right) d\varphi$$

---

## 23.2 Kurvenintegrale (Linienintegrale)

### 1. Kurvenintegrale von skalaren Feldern

$\gamma$ sei die gegebene Bahn (Kurve) mit der glatten Darstellung
$\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \le t \le b$, $\gamma = \vec{r}([a,b])$.

Es gelte $\gamma \subset G$: ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Weiter ist
$f: G \to \mathbb{R}$, $f \in C^0(G)$, gegeben.

Def:
$$\int_\gamma f\,ds := \int_a^b f(\vec{r}(t))\, \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt$$

Bemerkungen

1) Für $f = 1$ ist $\int_\gamma ds$ die Länge von $\gamma$.
"$ds = \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$" heißt skalares Linienelement.

2) $\int_\gamma f\,ds$ ist unabhängig von der speziellen Parameterdarstellung. (vgl S.51/22.3, 4.)

3) Ist $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \le t \le b$, eine Darstellung für $\gamma$, so ist $\vec{\rho} = \vec{\rho}(\tau) := \vec{r}(a+b-\tau)$, $a \le \tau \le b$, eine Parametrisierung der in entgegengesetzten Sinn durchlaufenen Trajektorie, von $-\gamma$.
Es gilt $$\int_\gamma f\,ds = \int_{-\gamma} f\,ds. \quad (\text{Ü})$$

4) Es sei $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \le t \le b$, mit $\vec{r}([a,b]) = \gamma$, gegeben. Mit $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_N = b$ werden durch $\vec{r}_j = \vec{r}_{|[a_{j-1}, a_j]}$ Kurven definiert ($j = 1, \ldots, N$).

Die zugehörigen Trajektorien seien $\gamma_j$. Gilt $\vec{r}_j(a_j) = \vec{r}_{j+1}(a_j)$, so schreibt man $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_N$

und definiert:

$$\int_\gamma f\, ds = \sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_j} f\, ds .$$

5) Ist $\gamma$ geschlossen, so wird

$$\int_\gamma f\, ds = \oint_\gamma f\, ds \quad \text{geschrieben.}$$

Der Pfeil kennzeichnet die Durchlaufungsrichtung von $\gamma$.