## 2. Kurvenintegral eines Vektorfeldes

Es sei $\vec{v} : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\gamma \subset G$ sei die Spur einer stückweise glatten Kurve $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \le t \le b$.

Def: $$\underline{\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}} := \underline{\int_a^b \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt}$$

$d\vec{s} := \vec{r}\,'(t)\,dt$ heißt <u>vektorielles Linienelement</u> von $\gamma$.

Mit $\vec{T}(t) := \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$ gilt $d\vec{s} = \vec{T}(t)\,ds$, so dass wir auch schreiben können: $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_\gamma (\vec{v} \cdot \vec{T})\,ds$.

<u>Beispiele</u> 1) $$\int_{-\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = -\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

2) Ist $f : G \to \mathbb{R}$ ein $C^1$-Skalarfeld, so hat man

$$\int_\gamma \nabla f \cdot d\vec{s} = \underline{f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))}.$$

---

## 23.3 Gaußscher Integralsatz im $\mathbb{R}^2$

Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalgebiet, die Randkurve $\partial G$ sei positiv orientiert (bezogen auf $G$) und stückweise glatt. Es sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in C^1(G) \cap C^0(\overline{G})$. Dann gilt

$$\underline{(G)} \quad \left( \oint_{\partial G} (\vec{v} \cdot \vec{T})\,ds = \right) \underline{\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_G \left( D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y) \right) d(x,y)}$$

Normalgebiete sind z.B. Gebiete, die sich durch endlich viele Schnitte in Gebiete vom Typ $G^{(x)}$ oder $G^{(y)}$ (23.1/S.67,68) zerlegen lassen. Zur Übung versuche man, $\underline{(G)}$ gemäß dem

Vorgehen in der Vorlesung etwa für folgende Gebiete herzuleiten: $G_1 = \{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 < 2,\ x > 0\}$
oder $G_2 = \{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 < 2\}$.

<u>Bemerkungen, Beispiele, Ergänzungen</u>

1. $\gamma$ sei mittels Polarkoordinaten der $(x,y)$-Ebene durch $r = \varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$, gegeben. Es sei $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x(x^2+y^2) \\ y(x^2+y^2) \end{pmatrix}$.
Berechne $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$.

2. Den Flächeninhalt $I(G)$ des Normalgebietes $G$ berechnet man auch etwa so: $I(G) = \frac{1}{2} \oint_{\partial G} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$.
Hiermit erhält man für Gebiete der Form
$$G = \{(r\cos t, r\sin t) \mid 0 < r < r(t),\ \alpha < t < \beta\}$$
(wobei $r \in C^1[\alpha, \beta]$ sei): $\underline{I(G) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(t)\, dt}$
(<u>Leibnizsche Sektorformel</u>)

3. <u>Stokesscher Integralsatz im $\mathbb{R}^2$</u>
$G \subset \mathbb{R}^2$ und $\partial G$ seien wie für $(\underline{G})$. Mit $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \\ v_3(x,y) \end{pmatrix} \in C^1(G) \cap C^0(\overline{G})$ lässt $(\underline{G})$ so schreiben:
$$\underline{\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_G (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{e}_3 \, d(x,y)}$$

4. <u>Divergenzsatz im $\mathbb{R}^2$</u>
Es seien $G, \partial G$ wie für $(\underline{G})$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in C^1(G) \cap C^0(\overline{G})$.
$\partial G$ sei so dargestellt: $\vec{r}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$, $0 \le s \le L$, $\vec{r}'(s) = \vec{T}(s)$,
$\|\vec{T}(s)\| = 1$.

Mit $\vec{v}(x,y) := \begin{pmatrix} -w_2(x,y) \\ w_1(x,y) \end{pmatrix}$ und $\vec{N}(s) = \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}$ geht (G) über in

$$\text{(D)} \quad \oint_{\partial G} (\vec{w} \cdot \vec{N})\, ds = \iint_G \nabla \cdot \vec{w} \, d(x,y).$$

($\vec{N}(s)$ ist normal zu $\partial G$ und ins Äußere von $G$ gerichtet und hat die Länge 1)

Das Integral links in (D) heißt <u>der Fluss von $\vec{w}$ durch $\partial G$ in Richtung $\vec{N}$.</u>

<u>5.</u> Mit $f \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ und $g \in C^1(G) \cap C^0(\overline{G})$ bilde $\vec{w} := g \nabla f$. Setzt man dies in (D), so ergibt sich die <u>1. Greensche Formel</u>

$$\oint_{\partial G} g D_{\vec{N}} f \, ds = \iint_G (g \Delta f + \nabla g \cdot \nabla f)\, d(x,y)$$

Jetzt seien $f, g \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$. Vertauscht man $f$ und $g$ in der 1. Greenschen Formel und subtrahiert die so entstehende Gleichung von der 1. Gr. Formel, so erhält man die <u>2. Greensche Formel</u>:

$$\oint_{\partial G} (g D_{\vec{N}} f - f D_{\vec{N}} g)\, ds = \iint_G (g \Delta f - f \Delta g)\, d(x,y)$$

---

## 23.4 Potentialfelder

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Das Vektorfeld $\vec{v}: G \to \mathbb{R}^n$ heißt <u>Potentialfeld</u> (<u>Gradientenfeld</u>, <u>konservatives Feld</u>) auf $G$, falls es ein diff'bares Skalarfeld $f: G \to \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \nabla f$ auf $G$ gibt. $f$ heißt <u>Potential(funktion)</u> (<u>Stammfunktion</u>) für $\vec{v}$ auf $G$.

<u>Satz 1</u> Ist $\vec{v}: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig diff'bares Potentialfeld, so gilt $J_{\vec{v}}(\vec{x}) = J_{\vec{v}}(\vec{x})^T$, $\vec{x} \in G$.

(für $n=3$ ist das Satz 2 / 22.4 / S. 55)

Satz 2 (1. Hauptsatz für Kurvenintegrale)
(siehe hier S. 71/ 23.2, 2., Beispiel 2)/
Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\vec{v}: G \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Potentialfeld mit einem Potential $f: G \to \mathbb{R}$. $\vec{r}_0, \vec{r}_1$ seien die Ortsvektoren zweier Punkte aus $G$. Dann gilt für jede stückweise glatte in $G$ verlaufende Kurve $\gamma$, die $\vec{r}_0$ mit $\vec{r}_1$ verbindet

$$\gamma\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{v} \circ d\vec{s} = f(\vec{r}_1) - f(\vec{r}_0).$$

Satz 3 Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\vec{v}: G \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld.
Es sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(1) $\vec{v}$ ist Potentialfeld in $G$
(2) Für je zwei Punkte $\vec{r}_0, \vec{r}_1 \in G$ ist $\int_\gamma \vec{v} \circ d\vec{s}$ unabhängig von der $\vec{r}_0$ mit $\vec{r}_1$ verbindenden stückweise glatten Kurve $\gamma \subset G$.
(3) Für jede geschlossene stückweise glatte Kurve $\gamma \subset G$ gilt $\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$.

Bemerkung zu (2) $\to$ (1): Man rechnet nach, dass

$$f(\vec{x}) := \gamma\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{v} \circ d\vec{s}, \quad \vec{x} \in G,$$ ein Potential für $\vec{v}$ ist. Hierbei ist $\vec{x}_0$ ein beliebiger Punkt in $G$ und $\gamma \subset G$ eine beliebige $\vec{x}_0$ mit $\vec{x}$ verbindende Kurve.

**Satz 4** (2. Hauptsatz für Kurvenintegrale)

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet und $\vec{v}: G \to \mathbb{R}^n$ ein $C^1$-Vektorfeld. Dann gilt:

$\vec{v}$ ist Potentialfeld in $G \Leftrightarrow J_{\vec{v}} = J_{\vec{v}}^T$ in $G$

d.h.: $D_j v_k(\vec{x}) = D_k v_j(\vec{x})$
$\forall \vec{x} \in G, \forall j, k = 1, \dots, n$

Bemerkungen: 1) Zu dem Begriff einfach-zusammenhängend lese nach bei Meyberg-Vachenauer Band I oder bei Burg/Haf/Wille Band IV.

2) Für $\vec{v}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ gelten mit $G = B(0,2) \setminus \{(0,0)\}$

$\vec{v} \in C^1(G)$ und $D_1 v_2(x,y) = D_2 v_1(x,y)$, $(x,y) \in G$.

Trotzdem ist $\vec{v}$ kein Potentialfeld, da $\oint\limits_{x^2+y^2=1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 2\pi \neq 0$.

$G$ ist nicht einfach-zusammenhängend.

3) Ist $G = B(0,r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| < r\}$ und gilt $J_{\vec{v}}(\vec{x}) = J_{\vec{v}}(\vec{x})^T$, $\vec{x} \in G$, so wird durch

$$f(\vec{x}) = \int\limits_{\vec{0}}^{\vec{x}} \vec{v} \cdot d\vec{s}, \quad \vec{x} \in G,$$ wobei $\gamma$ die

geradlinige Verbindung von $\vec{0}$ nach $\vec{x}$ ist, ein Potential für $\vec{v}$ erklärt.

Beispiel: $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4xyz - z^2 - 3y^2 \\ 2x^2z - 6xy + 1 \\ 2x^2y - 2xz - 2 \end{pmatrix}$ ist auf

dem $\mathbb{R}^3$ ein Potentialfeld. Berechne ein Potential.

## [illegible] im $\mathbb{R}^3$ - Oberflächenintegrale

**1. Flächendarstellungen**

**explizit**: $z = f(x,y)$ $\quad (x = g(y,z),\ y = h(x,z))$

mit $$\vec{N}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+(D_1 f)^2_{(x,y)}+(D_2 f)^2_{(x,y)}}}\begin{pmatrix} D_1 f(x,y) \\ D_2 f(x,y) \\ -1 \end{pmatrix}$$

**implizit**: $F(x,y,z) = 0$ $\quad . \quad \vec{N} = \dfrac{\nabla F(x,y,z)}{\|\nabla F(x,y,z)\|}$

**Parameterdarstellung**

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$$

$\vec{r} \in C^1(\mathcal{U})$ mit $\operatorname{rang}(\vec{r}\,'(u,v)) = 2$ heißt **reguläres (glattes) Flächenstück im $\mathbb{R}^3$**. $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ ist eine Parameterdarstellung für dieses Flächenstück.

$$\vec{N}(u,v) = \frac{D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)}{\|D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)\|}$$

**Beispiele**

$$z = x^2 + y^2$$
$$z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$
$$(x-3)^2 + (y-5)^2 + (z+2)^2 = 25$$
$$\vec{r}(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20\cos\varphi\cos\vartheta \\ 20\sin\varphi\cos\vartheta \\ 20\sin\vartheta \end{pmatrix}$$
$$0 < \varphi < 2\pi$$
$$0 < \vartheta < \pi/2$$

Versuche, die einzelnen Darstellungen ineinander umzurechnen.