Beispiele, Ergänzungen, Bemerkungen Matrizen.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Es gelten $AB = 0 \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: Das Produkt quadratischer Matrizen ist nicht kommutativ. Und: Aus $AB = 0$ folgt nicht: $A = 0$ oder $B = 0$.
(vgl. Skalarprodukt und Vektorprodukt)

2. A, B seien Matrizen, für die AB bildbar ist.
Es gelten: $(AB)^T = B^T A^T$, $(AB)^* = B^* A^*$,

3. A, B, C seien Matrizen, für die die Ausdrücke, die folgen, definiert sind. Es gelten:

$$\underset{(p,r)(r,n)(n,m)}{A\,B\,C} = (AB)C = \underset{(p,m)}{A(BC)}$$

$$\underset{(m,n)\,(m,n)(n,j)}{(A+B)C} = \underset{(m,j)}{AC + BC}$$

$$\underset{(m,n)\,(n,l)\,(n,l)}{A(B+C)} = \underset{(m,l)}{AB + AC}$$

4. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{e}_k$, $\vec{y} = \sum_{k=1}^{n} y_k \vec{e}_k$

— $\vec{x}\,\vec{y}^T$ ist (n,n)-Matrix mit $(\vec{x}\,\vec{y}^T)_{jk} = x_j y_k$
$(j, k = 1, 2, \ldots, n)$

— $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} = \vec{y}^T \vec{x}$, $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x}^T \vec{x}$

$\vec{x} \in \mathbb{C}^n, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \overline{\vec{y}} = \vec{y}^* \vec{x}$, $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x}^* \vec{x}$

5. $A = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n] \in \mathbb{C}^{(m,n)}$, $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{e}_k^{(n)}$

$$\rightarrow \quad A\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{a}_k \qquad \overline{(*)}$$

Man liest aus (I) ab: $\begin{matrix}\vec{x} \to A\vec{x} \\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m\end{matrix}$ ist eine lineare

Abbildung: $\underline{A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}, \quad A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x}}$
$(\lambda \in \mathbb{C}, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n)$

Für den Kern dieser Abbildung schreiben wir $\mathrm{Kern}(A)$ und für das Bild dieser Abbildung $\mathrm{Bild}(A)$.

Aus (I) liest man weiter ab: $\underline{A\vec{e}_j^{(n)} = \vec{a}_j}$ $(j=1,\ldots,n)$

Weiter sieht man leicht ein: $\underline{\vec{e}_k^{(m)T} A} \in \mathbb{C}^{(1,n)}$ ist

$\underline{\text{der } k\text{-te Zeilenvektor}}$ $((A)_{k1}, (A)_{k2}, \ldots, (A)_{kn})$ von A.

Hieraus folgt weiter: $\underline{\vec{e}_k^{(m)T} A \vec{e}_j^{(n)} = (A)_{kj}}$ $\begin{matrix} k=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n\end{matrix}$

6. Spaltenform von AB, falls $A = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n] \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ und $B = [\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_\ell] \in \mathbb{C}^{(n,\ell)}$:

$$AB = [A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \ldots, A\vec{b}_\ell]$$

7. $E = [\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n] \in \mathbb{C}^{(n,n)}$.
Für $A \in \mathbb{C}^{(n,\ell)}$ gilt $EA = A$,

für $A \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ gilt $AE = A$. Wir können formulieren:

E ist die Matrix, für die für alle $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$
$EA = AE = A$ gilt.

20.10 Lineare Gleichungssysteme

1. Gegeben sind $A = (\alpha_{ik}) \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$. Gesucht sind alle $\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$

mit $\underline{A\vec{x} = \vec{y}}$. $\quad$ (1.1)

(1.1) heißt inhomogenes ($\vec{y} \neq \vec{0}$) lineares Gleichungssystem.
$A\vec{x} = \vec{0}$ ist das zugehörige homogene System.
Mit $\mathcal{L}_{\vec{y}} = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{y}\}$ wird die Menge aller Lösungen (= die allgemeine Lösung) von (1.1) bezeichnet. Es ist $\operatorname{Kern}(A) = \mathcal{L}_{\vec{0}}$.

Satz 1: $A\vec{x} = \vec{y}$ ist lösbar $\Longleftrightarrow \vec{y} \in \operatorname{Bild}(A)$
$\Longleftrightarrow \vec{y} \in \operatorname{Lin}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$

Andere Formulierung: Sind $\vec{y}, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ l.u., so ist (1.1) nicht lösbar.

Satz 2: (vgl Satz 4/S.80, HMI)
Es sei (1.1) lösbar; eine Lösung sei $\vec{x}_p$. Dann hat man:
1) $\mathcal{L}_{\vec{y}} = \vec{x}_p + \operatorname{Kern}(A)$, d.h.
$\vec{x} \in \mathcal{L}_{\vec{y}} \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_0$ mit $\vec{x}_0 \in \operatorname{Kern}(A)$
2) $A\vec{x} = \vec{y}$ besitzt genau eine Lösung $\Longleftrightarrow \operatorname{Kern}(A) = \{\vec{0}\}$. $\square$

Bemerkung zu 1): Ist $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k)$ eine Basis von $\operatorname{Kern}(A)$, so hat jede Lösung von (1.1) die Form
$$\vec{x} = \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu \vec{x}_\nu + \vec{x}_p \quad \text{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}.$$

2. Der Rang einer Matrix.

2.1 Es sei $A \in \mathbb{C}^{(m,n)}$. Wir bezeichnen mit $\vec{z}_j$ $(j=1,\dots,m)$ die (Zeilen)vektoren $\begin{pmatrix}(A)_{j1}\\(A)_{j2}\\ \vdots \\ (A)_{jn}\end{pmatrix}$ (von A).

Die Maximalzahl l.u. Zeilen von A wird der <u>Zeilenrang t</u> von A, die Maximalzahl l.u. Spalten von A wird der <u>Spaltenrang s</u> von A genannt.

Es gilt $(A \neq 0)$: $1 \le s, t \le \min(m,n)$.

2.2 <u>Elementare Zeilenumformungen</u> an der Matrix A:

<u>Z1</u> Multipliziere $\vec{z}_j^{\,T}$ mit $\alpha \neq 0$.

<u>Z2</u> Addiere zu $\vec{z}_j^{\,T}$ das α-fache der Zeile $\vec{z}_k^{\,T}$ $(j \neq k)$

<u>Z3</u> Vertausche zwei Zeilen.

<u>Satz 3</u> Wird A mittels <u>Z1</u>, <u>Z2</u>, <u>Z3</u> umgeformt, so ändern sich s und t nicht.

<u>Satz 4</u> Jede Matrix lässt sich durch Zeilenumformungen <u>Z1</u>, <u>Z2</u>, <u>Z3</u> auf Zeilennormalform transformieren.

DIE ZEILENNORMALFORM

DEFINITION.- Eine $(m \times n)$-Matrix

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

besitzt *Zeilennormalform*, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

(1) Unterhalb der Diagonalen stehen nur Nullen, d.h.

$$c_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad i > j.$$

(2) Das erste nicht-verschwindende Element jeder Zeile (von links gesehen) ist gleich 1.

(3) Ist c_{ij} das erste nicht-verschwindende Element der i-ten Zeile (*), so ist

$$c_{kj} = 0 \quad \text{für alle } k \neq i,$$

d.h. oberhalb und unterhalb des Elementes $c_{ij} = 1$ stehen lauter Nullen in der j-ten Spalte.

BEMERKUNG Die folgende Matrix hat Zeilennormalform, wobei an den mit * markierten Stellen Nullen oder nicht-verschwindende Elemente stehen können:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der Zeilennormalform kann man das folgende Ergebnis ablesen:

<u>Satz 5</u> Für jede Matrix A gilt $t = s$.

Diese gemeinsame Zahl heißt <u>Rang von A</u> : $\mathrm{rang}(A) = r$.

Also $r =$ Maximalzahl l. u. Spalten von A

$= \dim \mathrm{Bild}(A)$

$=$ Maximalzahl l. u. Zeilen von A

$= \dim \mathrm{Bild}(A^T)$

$\leq \min(m, n)$.

Den Satz 1 kann man jetzt auch so formulieren:

(1.1) ist lösbar $\longleftrightarrow$ $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A, \vec{y})$.

<u>3. Lösen des Gleichungssystems (1.1)</u>

<u>Satz 6</u> Es sind $A \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ und $\vec{y} \in \mathbb{C}^m$ gegeben. $\mathcal{L}_{\vec{y}}$ sei die Lösungsmenge von (1.1). Die Matrix $(A, \vec{y})$ gehe über in $(\tilde{A}, \tilde{\vec{y}})$ durch elementare Zeilenumformungen. Es gilt $\mathcal{L}_{\vec{y}} = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n / \tilde{A}\vec{x} = \tilde{\vec{y}}\}$.

(Die Gleichungen $A\vec{x} = \vec{y}$ und $\tilde{A}\vec{x} = \tilde{\vec{y}}$ sind äquivalent: sie haben dieselben Lösungen)

Aus $\tilde{A}\vec{x} = \tilde{\vec{y}}$ erhält man, wenn $\mathrm{rang}(A) = r$ ist, die Zeilen $\tilde{\vec{z}}_j^{\,T} = \vec{0}^T$ $(j = r+1, \ldots, m)$ und liest ab, dass das System genau dann lösbar ist, falls $\tilde{\eta}_{r+1} = \ldots = \tilde{\eta}_m = 0$ gelten. Die ersten r Gleichungen von $\tilde{A}\vec{x} = \tilde{\vec{y}}$ werden nach ξ_{k_j} $(j = 1, \ldots, r)$ aufgelöst. Die k_j-te Spalte von $\tilde{A}$ ist $\vec{e}_j^{\,(m)}$: