A13 Der (n,n)-Matrix A wird die (n,n)-Matrix $\text{adj}(A)$ (Adjunkte von A) wie folgt zugeordnet:

$$(\text{adj}(A))_{k\ell} := (-1)^{k+\ell} \det(A_{\ell k})$$
$$= \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{e}_\ell, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n)$$

Satz 5 $\quad \text{adj}(A)\, A = \det(A)\, E$

Folgerung: Ist A regulär, so gilt $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$.

also: $(A^{-1})_{rs} = \frac{1}{\det(A)} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{r-1}, \vec{e}_s, \vec{a}_{r+1}, \dots, \vec{a}_n)$

Eine Verallgemeinerung hiervon ist die Cramersche Regel:
Die Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ des Gleichungssystems
$A\vec{x} = \vec{y}$ mit regulärer Matrix A und Inhomogenität
$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ist $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$ oder

$$x_k = \frac{1}{\det(A)} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{y}, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n).$$
$$(k = 1, \dots, n)$$

Beispiele:

1) $$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn}$$

2) $$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le k < j \le n} (\alpha_j - \alpha_k)$$

20.13 Orthogonale Matrizen

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ heißt <u>orthogonal</u>, falls $A^T A = E$ gilt.

<u>Beispiele</u> $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

<u>1.</u> Für jede orthogonale Matrix A gilt: $|\det(A)| = 1$.
$\Rightarrow$: A ist orthogonal $\Leftrightarrow$ $A^T = A^{-1}$

<u>2.</u> A ist orthogonal $\longleftrightarrow$ A^T ist orthogonal $\longleftrightarrow$ A^{-1} ist orthogonal

<u>3.</u> Das Produkt orthogonaler (n,n)-Matrizen ist eine orthogonale Matrix.

<u>4.</u> Für $A, B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ seien AB und B orthogonal. Dann ist A orthogonal.

<u>5.</u> <u>Satz 1</u> Es sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent: <u>(1)</u> A ist orthogonal <u>(2)</u> $A^T = A^{-1}$
<u>(3)</u> A^T ist orthogonal <u>(4)</u> A^{-1} ist orthogonal
<u>(5)</u> $A\vec{e}_j$ $(j=1,\dots,n)$ sind eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$
<u>(6)</u> $\vec{e}_j^{\,T} A$ $(j=1,\dots,n)$ bilden eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$
<u>(7)</u> Ist $(\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n)$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$, so ist $(A\vec{b}_1,\dots,A\vec{b}_n)$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$
<u>(8)</u> $\vec{x}^T\vec{y} = (A\vec{x})^T A\vec{y}$ $\quad \forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$
<u>(9)</u> $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ $\quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$
<u>(10)</u> $\|A\vec{x} - A\vec{y}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ $\quad \forall \vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

6. <u>Satz 2</u>

a) Jede orthogonale (2,2)-Matrix ($\neq E$) hat genau eine der beiden Formen:

$$D = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \text{ oder } S = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix} \text{ mit } c^2 + s^2 = 1.$$

b) Die Abbildung $\vec{x} \to S\vec{x}$ beschreibt eine Spiegelung an der Geraden durch $\vec{0}$ mit Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} c+1 \\ s \end{pmatrix}$.

7. <u>Bemerkung</u>:

Zur Berechnung von $\vec{v}$ in Satz 2 b) behandle das Problem: Gesucht sind Zahlen λ derart, dass

$S\vec{v} = \lambda\vec{v}$ nichttriviale Lösungen $\vec{v}$ besitzt. Ergebnis: $\lambda = 1$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} c+1 \\ s \end{pmatrix}$ und $\lambda = -1$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} -s \\ c+1 \end{pmatrix}$.

8. Es seien $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ und $\vec{y} \in \mathbb{C}^n$ gegeben und $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ mit $A\vec{x} = \vec{y}$ gesucht.

Führt man mittels einer regulären Matrix $C = [\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n]$ neue Variablen $\vec{x}', \vec{y}'$ durch $\vec{x} = C\vec{x}', \vec{y} = C\vec{y}'$ ein, so geht $A\vec{x} = \vec{y}$ über in $A'\vec{x}' = \vec{y}'$ mit $A' = C^{-1}AC$. Ist es z.B. möglich, C so zu wählen, dass A' (= Diagonalmatrix) $= [\lambda_1\vec{e}_1, \lambda_2\vec{e}_2, \dots, \lambda_n\vec{e}_n]$ wird, so lässt sich $\vec{x}'$ leicht und damit $\vec{x} = C\vec{x}'$ bestimmen. Es ist A' die obige Diagonalmatrix, falls für die Spalten $\vec{c}_j$ von C die Gleichungen

$$A\vec{c}_j = \lambda_j\vec{c}_j \quad (j = 1, \dots, n) \text{ erfüllt sind.}$$