Also: Besitzt $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ n l. u. Lösungen $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ (für gewisse λ), so ist $C = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$ eine Matrix, für die $C^{-1}AC$ diagonal ist.

20.14 Eigenwertprobleme (EWP)

1. Beispiele: 1) siehe 7., 8. Seite vorher

2) $\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, A (n,n)-Matrix, konstant

Gesucht ist $\vec{x} = \vec{x}(t)$ mit $\ddot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t)$

(konkretes Beispiel für $n = 2$: Burg, Haf, Wille Band 2 S. 266 f Zwei-Massen- bzw. Mehr-Massen-Schwinger)

Der Ansatz $\vec{x}(t) = \vec{b}e^{\omega t}$ führt auf das Gleichungssystem für $\vec{b}$ (und ω): $A\vec{b} = \omega^2\vec{b}$.

oder: Mit $\vec{x}(t) = C\vec{z}(t)$ erhält man für $\vec{z} = \vec{z}(t)$ die DGl $\ddot{\vec{z}}(t) = C^{-1}AC\,\vec{z}(t)$ (siehe 8./oben).

2. Eigenvektoren (EV) und Eigenwerte (EW) einer linearen Abbildung

Def: Es sei V ein VR und $S \subset V$ ein Teilraum. $T: S \to V$ sei linear. $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt EW von T, falls es ein $x \in S$, $x \neq 0$ gibt mit $T(x) = \lambda x$. x heißt dann EV zum EW λ.

Ist λ ein EW von T, so heißt der VR
Kern $(T-\lambda I) =: E(\lambda)$ der Eigenraum von λ.
x ist EV zu λ $\Longleftrightarrow$ $x \in E(\lambda) \setminus \{0\}$.
$\dim(E(\lambda))$ heißt geometrische Vielfachheit $\gamma(\lambda)$ von λ (im endlich-dim Fall).

Bemerkungen, Beispiele

1. Zu einem EV gibt es genau einen EW.
2. Hat man Kern$(T) \neq \{0\}$, so ist jedes $x \in$ Kern$(T) \setminus \{0\}$ EV zum EW 0.
3. $S = V = \mathbb{R}^3 (x_1, x_2, x_3)$. T: Spiegelung an der (x_1, x_2)-Ebene.
4. $S = \mathbb{C} = V$ T: Rotation der komplexen Ebene um 0 um den Winkel α: $T(z) = e^{i\alpha} z$ $\forall z \in \mathbb{C}$
   jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist EV zum EW $e^{i\alpha}$.
5. $V = C^\infty(I)$ ($I \subset \mathbb{R}$ Intervall): $T = D : V \to V$
   $Df = f'$
6. $V = C^0(\underset{[a,b]}{\underset{\shortparallel}{I}})$, $T: V \to V$: $T(f)(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, $a \leq x \leq b$.

Satz 1 S, V seien wie oben. $T: S \to V$ sei linear. $u_1, \dots, u_k$ seien EV und die zugehörigen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ seien verschieden. Dann sind $u_1, \dots, u_k$ l. u.

Satz 2 Es sei $\dim(V) = n$. Dann hat man:
$T \in \mathcal{L}(V, V)$ hat höchstens n verschiedene EW.
Hat T genau n verschiedene EW, dann bilden die zugehörigen EV eine Basis für V. Die zu T bzgl. dieser Basis gehörende Matrix ist eine Diagonalmatrix.

<u>Satz 3</u> $T \in \mathcal{L}(V,V)$, $\dim(V) = n$.

1). Besitzt T n l.u. EV $u_1, \dots, u_n$ mit den EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so ist die Matrix zu $T: (V, (u_1, \dots, u_n)) \to (V, (u_1, \dots, u_n))$ die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

2) Gibt es in V eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ derart, dass die zu $T: (V, (v_1, \dots, v_n)) \to (V, (v_1, \dots, v_n))$ gehörende Matrix die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \rho_1 & & & 0 \\ & \rho_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \rho_n \end{pmatrix}$ ist, so gelten $T(v_j) = \rho_j v_j$ $(j = 1, \dots, n)$.

3. <u>Das charakteristische Polynom einer (n,n)-Matrix</u>

Gegeben ist $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$. λ ist EW von A

$\iff \operatorname{rang}(A - \lambda E) < n$

$\iff \chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E) = 0$ ($\chi_A(\lambda)$ heißt das <u>char. Polynom</u> zu A)

<u>Satz 4</u> $\chi_A(\lambda)$ ist ein Polynom n-ten Grades:

$$\chi_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k \text{ mit } c_n = (-1)^n,$$

$$c_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj} \quad \left(= (-1)^{n-1} \operatorname{Spur}(A)\right),$$

$$c_0 = \det(A).$$

Hat A die verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, dann gilt $\chi_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)^{m_j}$

mit $m_j \in \mathbb{N}$ und $\sum_{j=1}^{k} m_j = n$.

m_j heißt <u>die algebraische Vielfachheit von λ_j</u>.

Aus der Produktdarstellung von $f_A(\lambda)$ in Verbindung mit Satz 4 erhält man:

<u>Satz 5</u> Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen EW von $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ und hat λ_j die algebraische Vielfachheit m_j $(j = 1, \dots, k)$, so folgen:

$$\det(A) = \prod_{j=1}^{k} \lambda_j^{m_j} \quad \text{und} \quad \operatorname{spur}(A) = \sum_{j=1}^{k} m_j \lambda_j .$$

<u>Bemerkung</u>: A ist nicht regulär $\Longleftrightarrow$ ein EW ist 0.

<u>Beispiele</u>: 1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat die EW

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$ mit $m(\lambda_1) = g(\lambda_1) = 2$, $m(\lambda_2) = g(\lambda_2) = 1$.

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat den EW $\lambda = 2$ mit $m(2) = 3$, $g(2) = 1$.

4. <u>Matrizen, die dieselbe lineare Abbildung repräsentieren. Ähnliche Matrizen.</u>

Es seien $\dim(V) = n$, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und die Basen $(v_1, \dots, v_n)$ und $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ von V gegeben. Zu

$T : (V, (v_1, \dots, v_n)) \to (V, (v_1, \dots, v_n))$ gehöre die Matrix

$A = (\alpha_{jk})$ gemäß (1) $\underline{T(v_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} v_j}$ $(k = 1, \dots, n)$

und zu

$T : (V, (u_1, \dots, u_n)) \to (V, (u_1, \dots, u_n))$ die Matrix

$B = (\beta_{jk})$ gemäß (2) $\underline{T(u_j) = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} u_k}$ $(j = 1, \dots, n)$.

Mit den $(1,n)$-Matrizen $\mathcal{U} = [u_1\, u_2 \cdots u_n]$, $\mathcal{V} = [v_1 \dots v_n]$, $\mathcal{U}' = [T(u_1) \cdots T(u_n)]$, $\mathcal{V}' = [T(v_1) \cdots T(v_n)]$ lassen sich (1), (2) so schreiben: $\underline{\mathcal{V}' = \mathcal{V} A}$ (3), $\underline{\mathcal{U}' = \mathcal{U} B}$ (4)