Da $(u_1, \dots, u_n)$ und $(v_1, \dots, v_n)$ Basen von V sind, gibt es eine reguläre (n,n)-Matrix C mit
$$\mathcal{U} = \mathcal{V}C \text{ und } \mathcal{U}' = \mathcal{V}'C \qquad (5)$$
Aus (3) - (5) folgt $B = C^{-1}AC$.

<u>Definition</u>: Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ heißen <u>ähnlich</u>, wenn es eine reguläre Matrix C gibt mit $B = C^{-1}AC$.

Ein Teil des folgenden Satzes sind die vorherigen Überlegungen:

<u>Satz 6</u> Zwei (n,n)-Matrizen sind ähnlich genau dann, wenn sie dieselbe lineare Abbildung repräsentieren.

<u>Satz 7</u> Ähnliche Matrizen A, B besitzen dasselbe charakteristische Polynom: $\chi_A = \chi_B$ und also dieselben EW. Insbesondere hat man: $\det(A) = \det(B)$, $\text{Spur}(A) = \text{Spur}(B)$.

<u>Definition</u>: $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ heißt <u>diagonalisierbar</u>, wenn A zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.

<u>Satz 8</u> (vgl. Satz 3 Riemenschneider 20.14)
$A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ A besitzt n l.u. EV
$\Leftrightarrow$ für jeden EW stimmen die geometr. und die algebr. Vielfachheit überein.

Z: <u>Diagonalisieren einer (n,n)-Matrix A</u>
Berechne alle EV. Gibt es n l.u. EV $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, so gilt mit $C = [\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n]$, dass $C^{-1}AC$ diagonal ist.
Gibt es weniger als n l.u. EV, so ist A nicht diagonalisierbar.

Beispiele (siehe unter 3./S. 34)

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar: mit

$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ besitzt den 3-fachen EW 2, dessen geometr. Vielfachheit 1 ist: A ist nicht diagonalisierbar.

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar: mit

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ gilt $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

20.15 Hermitesche Matrizen sind diagonalisierbar

1. Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer VR, S ein Teilraum von V. Der Operator $T \in \mathcal{L}(S, V)$ heißt hermitesch (selbstadjungiert) auf S, falls $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle \quad \forall x, y \in S$ gilt. (Im Reellen / im euklidischen VR heißt ein hermitescher Operator auch symmetrisch)

Beispiel: $V = C[0,\pi]$, $S = \{ f \in C^2[0,\pi] \mid f(0) = f(\pi) = 0 \}$
$f, g \in V$: $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x) g(x)\,dx$ (f, g reellwertig).
Der durch $T(f) := f'' + \omega^2 f$ ($\omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0$) definierte lineare Operator von S nach V ist hermitesch (symmetrisch).

Satz 1 Es sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ ein hermitescher Operator. Dann gelten: 1) Eigenwerte von T sind reell
2) Eigenvektoren zu verschiedenen EW sind orthogonal.

Satz 2 Es sei $(V, <\cdot,\cdot>)$ ein unitärer n-dimensionaler VR und $T \in \mathcal{L}(V,V)$ ein hermitescher Operator. Dann gibt es eine ON-Basis von V aus Eigenvektoren von T.

2. Matrixdarstellung hermitescher Operatoren

Satz 3 Es sei $(V, <\cdot,\cdot>)$ ein unitärer n-dim VR, $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ sei eine Basis von V und $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gilt:
T ist hermitesch $\longleftrightarrow$ $<T(v_j), v_k> = <v_j, T(v_k)>$ $\forall j,k$

Satz 4 Es sei $(V, <\cdot,\cdot>)$ ein unitärer n-dim VR und $(u_1, \dots, u_n)$ eine ON-Basis. Die zu $T \in \mathcal{L}(V,V)$ bezogen auf diese Basis gehörende Matrix sei die (n,n)-Matrix $A = (\alpha_{jk})$. Es gilt:
T ist hermitesch $\longleftrightarrow$ $A = A^*$ (d.h. $\alpha_{\ell j} = \overline{\alpha_{j\ell}}$ $j, \ell = 1, \dots, n$)

3. Satz 5 (Diagonalisieren hermitescher Matrizen)

Ist $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ $(\mathbb{R}^{(n,n)})$ hermitesch (symmetrisch), so existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und eine unitäre (orthogonale) (n,n)-Matrix C mit $\chi_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$

und

$$\left.\begin{matrix} C^* A C \\ (C^T A C) \end{matrix}\right\} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Zusammenfassung: Diagonalisieren symmetrischer Matrizen

1. $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, $A = A^T$ hat die verschiedenen reellen EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $(1 \le k \le n)$ mit den Vielfachheiten $m_j = \gamma_j$ $(j = 1, \ldots, k)$.

2. $E(\lambda_j) = \mathrm{Lin}(\vec{x}_1^{(j)}, \ldots, \vec{x}_{m_j}^{(j)})$ $(j = 1, \ldots, k)$

Es gilt $E(\lambda_j) \perp E(\lambda_\ell)$ $(j \neq \ell)$ (Satz 1, S. 37)

3. Ersetze $\{\vec{x}_1^{(j)}, \ldots, \vec{x}_{m_j}^{(j)}\}$ durch ein ON-System $\{\vec{y}_1^{(j)}, \ldots, \vec{y}_{m_j}^{(j)}\}$ (Gram-Schmidt Verfahren, 20.7, Satz 9) mit $E(\lambda_j) = \mathrm{Lin}(\vec{y}_1^{(j)}, \ldots, \vec{y}_{m_j}^{(j)})$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$

$\rightarrow \{\vec{y}_1^{(1)}, \ldots, \vec{y}_{m_1}^{(1)}, \vec{y}_1^{(2)}, \ldots, \vec{y}_{m_2}^{(2)}, \ldots, \vec{y}_1^{(k)}, \ldots, \vec{y}_{m_k}^{(k)}\}$ ist ein ON-System von n EV von A. Umbenenne sie zu: $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$.

Die Matrix $C = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]$ ist dann orthogonal und es gilt $C^T A C = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_1}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{m_2}, \ldots, \underbrace{\lambda_k, \ldots, \lambda_k}_{m_k})$.

20.16 Definitheit reeller symmetrischer Matrizen

1. Mit $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ wird die Funktion $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\underline{q(\vec{x}) := \vec{x}^T A \vec{x}} = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk} x_j x_k$ gebildet

(Hier ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $A = (\alpha_{jk})$.)

<u>o.B.d.A. ist $A = A^T$.</u>

Wir gehen also jetzt aus von: $\underline{A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, A = A^T}$ und $\underline{q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}}$. q heißt die zu A gehörende <u>quadratische Form</u>

2. Definition

1) A heißt $\begin{cases} \text{positiv definit, falls } q(\vec{x}) > 0 & \forall \vec{x} \neq \vec{0} \\ \text{positiv semidefinit, falls } q(\vec{x}) \geq 0 & \forall \vec{x} \end{cases}$ gilt.

2) A heißt negativ (semi)definit, falls $-A$ positiv (semi)definit ist.

3) A heißt indefinit, falls es $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $q(\vec{x}_1) q(\vec{x}_2) < 0$.

Satz 1 Es sei A wie oben: $\in \mathbb{R}^{(n,n)}$, symmetrisch

Es gelten:
1. A ist positiv definit $\iff$ alle EW sind positiv
2. A ist positiv semidefinit $\iff$ alle EW sind nicht-negativ
3. A ist indefinit $\iff$ es gibt zwei EW λ_1, λ_2 mit $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.

Satz 2 $(n=2)$ Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \neq 0$, aus $\mathbb{R}^{(2,2)}$.

Es gelten:
1. A ist positiv definit $\iff$ $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$
2. A ist negativ definit $\iff$ $a < 0$ und $ac - b^2 > 0$
3. A ist positiv semidefinit $\iff$ $ac - b^2 \geq 0$ und $a + c \geq 0$
4. A ist indefinit $\iff$ $ac - b^2 < 0$.