22. Kapitel Mehrdimensionale Differentialrechnung

22.1 1) $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j$

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} \cdot \vec{y} \; (= \vec{x}^T \vec{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ (Skalarprodukt)

$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ (euklid. Norm)

$\vec{x}, \vec{a} \in \mathbb{R}^n$: $(\vec{x} \to \vec{a} \text{ in } \mathbb{R}^n) \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} (\|\vec{x} - \vec{a}\| \to 0)$

$\Longleftrightarrow (x_j \to a_j) \; (j = 1, 2, \dots, n)$

2) $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$: $B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$ heißt <u>offene Kugel um $\vec{a}$ mit Radius r.</u>

$\vec{a} \in S \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>innerer Punkt von S</u>, wenn es ein $r > 0$ mit $B(\vec{a}, r) \subset S$ gibt. Die Menge S heißt <u>offen</u>, wenn jeder Punkt von S innerer Punkt von S ist. $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $B(\vec{x}, r) \cap S = \emptyset$ für ein $r > 0$ heißt <u>äußerer Punkt von S</u>. Ist $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ weder innerer noch äußerer Punkt von S, so heißt $\vec{x}$ <u>Randpunkt von S</u>. Mit <u>∂S</u> wird die Menge <u>der Randpunkte von S</u> (= der Rand von S) bezeichnet. $\vec{x} \in \partial S \Longleftrightarrow$ für jedes $r > 0$ gilt $B(\vec{x}, r) \cap S \neq \emptyset$ und $B(\vec{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) \neq \emptyset$.

22.2 $\vec{f} : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\vec{x} \to \vec{y} := \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$

S ist der Defbereich von $\vec{f}$.

$f_j : S \to \mathbb{R}$ heißt <u>Koordinatenfunktion von $\vec{f}$</u>.

Es ist $\vec{f}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{m} f_k(\vec{x}) \vec{e}_k$.

Def: $\vec{f}: S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt in $\vec{a} \in S$ stetig,

wenn $\lim\limits_{\|\vec{x}-\vec{a}\| \to 0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$ gilt, d.h.

$\lim\limits_{\|\vec{x}-\vec{a}\| \to 0} \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a})\| = 0$. Ist $\vec{f}$ in jedem

Punkt von S stetig, so heißt $\vec{f}$ auf S stetig.

Satz 1 Sind $\vec{f}$ und $\vec{g}$ in $\vec{a}$ stetig, so sind

$\lambda\vec{f}+\mu\vec{g}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$, $\vec{f}\cdot\vec{g}$ und $\|\vec{f}\|$

in $\vec{a}$ stetig.

($\vec{f}\cdot\vec{g}: S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\|\vec{f}\|: S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind

durch $(\vec{f}\cdot\vec{g})(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x})\cdot\vec{g}(\vec{x})$ bzw $\|\vec{f}\|(\vec{x}) = \|\vec{f}(\vec{x})\|$

definiert.)

Satz 2 $\vec{f}: S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist in $\vec{a} \in S$ stetig

$\Longleftrightarrow$ jede Koordinatenfunktion f_j ist in $\vec{a}$ stetig.

Beispiele: 1) $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ sei eine konst (m,n)-Matrix

$\vec{f}(\vec{x}) := A\vec{x}$ ist in jedem $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ stetig.

2)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ ist in $(0,0)$

nicht stetig. $f(\cdot,0)$ und $f(0,\cdot)$ sind in $x=0$

bzw $y=0$ stetig.

3)
$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

lässt sich durch $\vec{f}(0,0) := \vec{0}$ zu einer auf $\mathbb{R}^2$ stetigen Fktn fortsetzen.

22.3 Kurven im $\mathbb{R}^n$

1. Def: Eine (parametrisierte) Kurve im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung

$$\vec{r} : I \to \mathbb{R}^n, \; t \to (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$$

eines Intervalls I in den $\mathbb{R}^n$. $\vec{r} = \vec{r}(t)$ heißt Parameterdarstellung der Kurve.

$\vec{r}$ heißt stetig diff'bar, falls x_j $(j = 1, \ldots, n)$ stetig diff'bar sind. Es gilt

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} (\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)) = (\dot{x}_1(t_0), \ldots, \dot{x}_n(t_0))^T.$$

$\vec{r}(I)$ heißt Spur von $\vec{r}$.

2. Bemerkungen. Bezeichnungen

1) Zu einer Kurve gehört eine Orientierung: wachsende t induzieren eine Durchlaufungsrichtung von $\vec{r}(I)$.

2) Ist $I = [a, b]$, so heißt $\vec{r}(a)$ Anfangspunkt und $\vec{r}(b)$ Endpunkt der Kurve. Gilt $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, so heißt die Kurve geschlossen. $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ mit $t_1 \neq t_2$ heißt Doppelpunkt der Kurve. Eine Kurve ohne Doppelpunkte heißt Jordankurve. Eine geschlossene Jordankurve hat den Anfangs- und Endpunkt als einzigen Doppelpunkt.

3) Eine C^1-Kurve $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^n$ heißt glatt (regulär) an der Stelle t_0, wenn $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq \vec{0}$ gilt.

$\vec{g}(t) = \vec{r}(t_0) + \dot{\vec{r}}(t_0)(t - t_0)$ $(t \in \mathbb{R})$ ist dann eine Gleichung der Tangente an die Kurve in $\vec{r}(t_0)$. $\dot{\vec{r}}(t_0)$ heißt Tangentialvektor oder auch Geschwindigkeitsvektor der Kurve in t_0. $\|\dot{\vec{r}}(t_0)\|$ heißt die Geschwindigkeit in t_0.

Beispiele: 1/ $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2-1 \\ t^3-t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

2/ $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, -1 \le t \le 1$, $\vec{\rho}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^3 \end{pmatrix}, -1 \le t \le 1$

3/ $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

4/ $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, t \in I$

5/ $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

---

3. Länge einer Kurve $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Für $a \le t_0 < t_1 < \dots < t_m \le b$ definieren $\vec{r}(t_j)$ $(j=0,1,\dots,m)$ Punkte auf der Kurve: Die Ecken eines einbeschriebenen Sehnenpolygons, dessen Länge durch $\sum_{j=1}^{m} \|\vec{r}(t_j) - \vec{r}(t_{j-1})\|$ gegeben ist.

Die Kurve heißt rektifizierbar (besitzt eine Länge), wenn die Menge der Längen aller einbeschriebenen Sehnenpolygone (mit endlich vielen Ecken) beschränkt ist. In diesem Fall heißt das dann existierende Supremum aller dieser Längen die Länge von $\vec{r}$: $L(\vec{r}) = L_a^b(\vec{r})$.

Satz 1 Eine C^1-Kurve $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar. Es gilt: $L(\vec{r}) = \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt$.

Beispiele: 1/ $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, 0 \le t \le \pi$: $L = \pi$

2/ $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix}, 0 \le t \le 2\pi$: $L = 8$

3/ $\vec{r}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \ge 0$: $L = \sqrt{2}$

4/ $\vec{r}(t) = (1+e^{-t}) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \ge 0$: $\int_0^\infty \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt$ ist divergent

4. Parameterwechsel

Def.: Eine C^k-Abbildung $g: I \to J$, $t \to \tau = g(t)$ (I, J Intervalle in $\mathbb{R}$) heißt eine C^k-Parametertransformation, wenn sie bijektiv ist und $g^{-1}: J \to I$ ebenfalls aus C^k ist.
Ist $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, eine Kurve, so heißt $\vec{\rho}(\tau) := \vec{r}(g^{-1}(\tau))$ eine Umparametrisierung von $\vec{r}$.
Es gilt $\vec{\rho}(J) = \vec{r}(I)$ ($\vec{\rho}$ und $\vec{r}$ haben dieselbe Spur)

Satz 2: Es sei $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve und $\vec{\rho}$ die Umparametrisierung mit g: $\vec{\rho} = \vec{r} \circ g^{-1}$; $g \in C^1$, $g: \underset{t}{[a,b]} \to \underset{\tau}{[\alpha,\beta]}$. Es gilt dann:

$$(L(\vec{r}) =) \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\|\, dt = \int_\alpha^\beta \|\vec{\rho}\,'(\tau)\|\, d\tau \quad (= L(\vec{\rho}))$$

Beispiel: Wird die glatte Kurve $\vec{r}: \underset{t}{[a,b]} \to \mathbb{R}^n$, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, mit dem Bogenlängeparameter $s (= g(t)) = \int_a^t \|\dot{\vec{r}}(u)\|\, du$ dargestellt durch $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s)$, $0 \le s \le L$, so gilt $\|\vec{\rho}\,'(s)\| = 1$. Diese Darstellung heißt auch natürliche Darstellung.

Die natürliche Darstellung der Schraubenlinie

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \text{ ist}$$

$$\vec{\rho}(s) = \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{s}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad 0 \le s \le \sqrt{2}\, 2\pi$$

22.4 Richtungsableitung. Partielle Ableitung

1. Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, gegeben sind
$g: S \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in S$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Def: Der Grenzwert, falls er existiert:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(g(\vec{x}_0 + h\vec{v}) - g(\vec{x}_0)\right)$$

heißt die Richtungsableitung von g in $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{v}$, er wird durch $(D_{\vec{v}} g)(\vec{x}_0)$ bezeichnet. Sie ist ein Maß für die Änderungsgeschwindigkeit der Werte $g(\vec{x})$ bei $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{v}$.

Für ein Vektorfeld $\vec{f}: S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit den Komponenten $f_j = \vec{f} \cdot \vec{e}_j : S \to \mathbb{R}$ wird $D_{\vec{v}} \vec{f}$ komponentenweise erklärt: $(D_{\vec{v}} \vec{f})(\vec{x}) = (D_{\vec{v}} f_1(\vec{x}), D_{\vec{v}} f_2(\vec{x}), \dots, D_{\vec{v}} f_m(\vec{x}))^T$.

Beispiele: 1) $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$: $D_{\vec{v}} f(\vec{x}) = 2\vec{x} \cdot \vec{v}$, $D^2_{\vec{v}} f(\vec{x}) = 2\|\vec{v}\|^2$

2) $\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x}$ ($A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, konst): $(D_{\vec{v}} \vec{f})(\vec{x}) = A\vec{v}$

Def:
Für $D_{\vec{e}_j} \vec{f}$ wird $D_j \vec{f}$ geschrieben, und $D_j \vec{f}$ heißt die partielle Ableitung nach der j-ten Variablen. $(D_j \vec{f})(\vec{x})$ wird gebildet, indem in $\vec{f}(\vec{x})$ die Variablen x_k ($k \neq j$) festgehalten werden und wie üblich nach der Variablen x_j differenziert wird.

Beispiel: $f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^2 + x_2 \ln x_1$

Gib den Def.bereich an. Berechne $(D_1 f)(x_1,x_2)$, $(D_2 f)(x_1,x_2)$, $(D_1 D_2 f)(x_1,x_2)$, $(D_2 D_1 f)(x_1,x_2)$.