UNIVERSITÄT KARLSRUHE 27.10.2006
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Lemmert
Dipl.-Math. Marc Mitschele

Höhere Mathematik III

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

1.Übungsblatt - WS 2006/2007

Aufgabe 1

Deuten Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$ geometrisch:

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| \geq 1, |z - 1 - 2i| < 3\}$

b) $\left\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3, \frac{-3\pi}{4} < \mathrm{Arg}(z) < \frac{-\pi}{4}\right\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| = |z - 2 - i|\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}((1 - i)z) \leq 1\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) \leq 1\}$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie Argument und Betrag von $z = -\sqrt{3} + i$.

b) Berechnen Sie den Real- und den Imaginärteil von $\frac{4+2i}{5-i}$ sowie von $\cos(\frac{\pi}{2} - i)$.

c) Bestimmen Sie ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|\sin(in)| > 10^5$.

Aufgabe 3

Drücken Sie folgende Terme mit Hilfe der Variablen z und $\overline{z}$ aus.

a) $x^2 - y^2$ b) $x^2 + y^2$ c) $x^2 - y^2 - 2ixy$

Aufgabe 4

Wo sind die folgenden Funktionen definiert? In welchen Punkten des Definitionsbereichs sind sie komplex differenzierbar bzw. holomorph? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung.

a) $f(x + iy) = \frac{1}{x^2 - y^2 + 2ixy}$

b) $f(z) = \mathrm{Re} z + i\overline{z}^2$

c) $f(z) = \frac{1}{\sin^2(z)}$

d) $f(x + iy) = \ln(x^2 + y^2) + 2i \arctan(\frac{y}{x})$

– bitte wenden –

Aufgabe 5
Die Funktion f sei holomorph in der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$, und es sei $D^* = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in D\}$.
Zeigen Sie, dass die Funktion $g : D^* \to \mathbb{C}$, die durch

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

definiert ist, in D^* holomorph ist, und bestimmen Sie ihre Ableitung g'.

Aufgabe 6

a) Es sei $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine holomorphe Funktion. Vergleichen Sie $|f'(z)|$ mit der Determinante der Funktionalmatrix/Jacobimatrix $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}u & \frac{\partial}{\partial y}u \\ \frac{\partial}{\partial x}v & \frac{\partial}{\partial y}v \end{pmatrix}$.

b) Es sei $f'(z) \neq 0$ für alle z aus dem Definitionsbereich von f. Zeigen Sie, dass f lokal eine holomorphe Umkehrfunktion besitzt.

c) Geben Sie ein Beispiel einer holomorphen Funktion f an, die keine Umkehrfunktion besitzt und deren Ableitung nirgends verschwindet.

ALLGEMEINE HINWEISE

Übungsklausuren: Die Übungsklausuren zur Höheren Mathematik III finden am Samstag, dem 9. Dezember 2006, und am Samstag, dem 3. Februar 2007, jeweils von 11 bis 13 Uhr statt.

Vordiplom: Die Vordiplomsklausur zur Höheren Mathematik III findet am Freitag, dem 16. März 2007, von 8 bis 10 Uhr statt. An- und Abmeldeschluss für diese Klausur ist am Freitag, dem 17. Februar 2007, um 11.30 Uhr.

Übungsblätter: Die Übungsblätter können freitags vor der Übung ab 13 Uhr in den Kästen vor dem Sekretariat abgeholt werden.

Internet: Informationen zur Vorlesung und zu Prüfungen finden Sie im Internet unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/mi1schneider/lehre/hmiii06072006w/

Dort sind auch die Übungsblätter und deren Lösungen verfügbar.