UNIVERSITÄT KARLSRUHE 03.11.2006
Institut für Analysis

Prof. Dr. Roland Lemmert
Dipl.-Math. Marc Mitschele

Höhere Mathematik III

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

2.Übungsblatt - WS 2006/2007

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Gleichung

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0 \tag{$*$}$$

mit Konstanten $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{C}$, wobei $|\beta|^2 > \alpha\gamma$ gelte.

a) Zeigen Sie, dass durch jede solche Gleichung ein Kreis oder eine Gerade in der komplexen Zahlenebene dargestellt wird.
Begründen Sie, dass sich jeder Kreis und jede Gerade in der komplexen Zahlenebene durch eine Gleichung dieser Form darstellen lässt.

b) Was wird durch die Gleichung $3z\overline{z} + (1+i)z + (1-i)\overline{z} - 1 = 0$ dargestellt?

c) Geben Sie jeweils eine Gleichung der Form $(*)$ für den Kreis um $2 + 3i$ mit Radius 5 und für die Gerade durch -1 und $2i$ an.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Wertebereich der Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, die durch

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\overline{z}} - \frac{\overline{z}}{z}\right)$$

definiert ist. Ist f auf ganz $\mathbb{C}$ stetig fortsetzbar?

Aufgabe 3

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann konstant ist, wenn $f'(z) = 0$ für jedes $z \in G$ gilt.

– bitte wenden –

Aufgabe 4
Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass f konstant ist, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) Die Funktion $z \mapsto \mathrm{Re} f(z)$ ist auf G konstant.

b) Die Funktion $z \mapsto \mathrm{Im} f(z)$ ist auf G konstant.

c) Die Funktion $z \mapsto |f(z)|$ ist auf G konstant.

d) f ist auf G nullstellenfrei und die Funktion $z \mapsto \mathrm{Arg} f(z)$ ist konstant.

Aufgabe 5
Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$u_\lambda(x, y) = x^2 - \lambda y^2 - y$$

Realteil einer holomorphen Funktion? Bestimmen Sie für dieses λ alle holomorphen Funktionen f, die u_λ als Realteil haben. Geben Sie f in der zugehörigen komplexen Darstellung an.

ALLGEMEINE HINWEISE

Sprechstunden:

- Prof. Dr. Roland Lemmert: Dienstag, 10.00 bis 11.30 Uhr, Zimmer 338.
- Dipl.-Math. Marc Mitschele: Dienstag, 14.00 bis 15.30 Uhr, Zimmer 316.

Internet: Informationen zur Vorlesung und zu Prüfungen finden Sie im Internet unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/mi1schneider/lehre/hmiii06072006w/

Dort sind auch die Übungsblätter und deren Lösungen verfügbar.