

## Höhere Mathematik III

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

3.Übungsblatt - WS 2006/2007

### Aufgabe 1

Sind die Funktionen

$$\begin{aligned}u(x, y) &= e^x [\cos(y) \sin(x) \cosh(y) - \sin(y) \cos(x) \sinh(y)], \\v(x, y) &= e^x [\sin(y) \sin(x) \cosh(y) + \cos(y) \cos(x) \sinh(y)]\end{aligned}$$

konjugiert harmonisch auf  $\mathbb{C}$ ?

### Aufgabe 2

- a) Es sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, und  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  werde definiert durch

$$u(x, y) = g(xy) \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Für welche solcher Funktionen  $g$  ist  $u$  auf  $\mathbb{R}^2$  harmonisch?

- b) Nun sei  $g(t) = 2t - 1$  und  $u(x, y) = g(xy)$ .  
Bestimmen Sie alle Funktionen  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass die durch  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  gegebene Funktion  $f$  auf  $\mathbb{C}$  holomorph ist. Geben Sie die Abbildungsvorschrift für  $f$  in der Form  $w = f(z)$  an.

### Aufgabe 3

Die Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ , die durch

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

gegeben ist, heißt Joukowski-Abbildung.

- a) Für welche  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist  $f(z)$  reell? Wo gilt  $f'(z) = 0$ ?
- b) Bestimmen Sie für  $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$  das Bildgebiet  $f(G)$ . Zeigen Sie, dass  $f$  auf  $G$  sogar injektiv ist.

– bitte wenden –

#### **Aufgabe 4** (Stereographische Projektion)

Die Einheitssphäre des  $\mathbb{R}^3$  ist gegeben durch  $S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ . Der Punkt  $N := (0, 0, 1)$  wird dabei als der Nordpol von  $S$  bezeichnet. Weiter wird die  $(x_1, x_2)$ -Ebene mittels  $z = x_1 + ix_2$  mit der komplexen Zahlenebene identifiziert. Verbindet man den Punkt  $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$  der  $(x_1, x_2)$ -Ebene durch eine Gerade mit dem Nordpol, so schneidet diese die Sphäre  $S$  in  $N$  und einem weiteren Punkt. Berechnen Sie diesen Schnittpunkt in Abhängigkeit von  $x_1$  und  $x_2$ .

## ALLGEMEINE HINWEISE

### **Sprechstunden:**

- Prof. Dr. Roland Lemmert: Dienstag, 10.00 bis 11.30 Uhr, Zimmer 338.
- Dipl.-Math. Marc Mitschele: Dienstag, 14.00 bis 15.30 Uhr, Zimmer 316.

**Übungsklausuren:** Die Übungsklausuren zur Höheren Mathematik III finden am Samstag, dem 9. Dezember 2006, und am Samstag, dem 3. Februar 2007, jeweils von 11 bis 13 Uhr statt.

**Vordiplom:** Die Vordiplomsklausur zur Höheren Mathematik III findet am Freitag, dem 16. März 2007, von 8 bis 10 Uhr statt. An- und Abmeldeschluss für diese Klausur ist am Freitag, dem 17. Februar 2007, um 11.30 Uhr.

**Übungsblätter:** Die Übungsblätter können freitags vor der Übung ab 13 Uhr in den Kästen vor dem Sekretariat abgeholt werden.

**Internet:** Informationen zur Vorlesung und zu Prüfungen finden Sie im Internet unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/mi1schneider/lehre/hmiii06072006w/>

Dort sind auch die Übungsblätter und deren Lösungen verfügbar.