UNIVERSITÄT KARLSRUHE 17.11.2006
Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Lemmert
Dipl.-Math. Marc Mitschele

Höhere Mathematik III

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

4.Übungsblatt - WS 2006/2007

Aufgabe 1

Auf der Menge $G := \left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} < \mathrm{Arg}(z) < \frac{3}{4}\pi\right\}$ sei die Abbildung $f(z) = z^2$ gegeben. Weiter bezeichne Δ das Dreieck mit den Eckpunkten $1, 1+i$ und i.

a) Zeigen Sie, dass f auf G schlicht ist.

b) Bestimmen Sie $f(\Delta)$ und die Schnittwinkel in den Ecken von $f(\Delta)$.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von $f(\Delta)$.

Aufgabe 2

Auf $\mathbb{C}$ wird die durch $f(z) = \sin(z)$ gegebene Funktion betrachtet.

a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die $\sin(z)$ reell ist.

b) Zeigen Sie, dass f das Gebiet $G := \left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}(z) < \frac{\pi}{2}\right\}$ schlicht abbildet, und bestimmen Sie das Bildgebiet $f(G)$.

Hinweis: Joukowski-Abbildung.

Aufgabe 3

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $\alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dar:

$$i^i, \qquad (1+i)^i, \qquad (\mathrm{Log}(i))^i, \qquad \sqrt[i]{i}.$$

Mit z^a ist $e^{a \log(z)}$ gemeint. $\mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + i\mathrm{Arg}(z)$, mit $-\pi < \mathrm{Arg}(z) < \pi$, bezeichnet den Hauptzweig des Logarithmus.

– bitte wenden –

Aufgabe 4

Es seien a, b, z, z_1 und z_2 komplexe Zahlen. Begründen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel die Aussagen

$$a^{z_1}a^{z_2} = a^{z_1+z_2}, \qquad a^z b^z = (ab)^z, \qquad \log(ab) = \log(a) + \log(b).$$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der folgenden Gleichungen.

a) $e^{1/z} = i$,

b) $\operatorname{Re}\left((1+i)^{z+1}\right) = 0$,

c) $\operatorname{Im}\left(z^{1+i}\right) = 0$.