UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis

Prof. Dr. Roland Lemmert
Dipl.-Math. Marc Mitschele

24.11.2006

Höhere Mathematik III

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

5.Übungsblatt - WS 2006/2007

Aufgabe 1

Skizzieren Sie jeweils die genannten Gebiete G und H, und geben Sie eine schlichte Abbildung $f : G \to H$ an.

a) $G := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}\,, \quad H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}\,,$

b) $G := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}\,, \quad H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}\,,$

c) $G := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}\,, \quad H := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \operatorname{Re} z\}\,,$

d) $G := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z < 0\}\,, \quad H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z + 1\}\,,$

e) $G := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}\,, \quad H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}\,.$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass sich der Mittelwertsatz der Differentialrechnung im allgemeinen nicht auf holomorphe Funktionen übertragen lässt.

Aufgabe 3

Das Gebiet G sei die zwischen 0 und i geschlitzte obere Halbebene. Weiter sei auf G die Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$; wobei $\sqrt{1} = 1$ gelte.

a) Zeigen Sie, dass f das Gebiet G konform und schlicht abbildet, und bestimmen Sie das Bildgebiet $f(G)$.

b) Geben Sie die Umkehrabbildung

$$g = f^{-1} : f(G) \to G, \quad w = u + iv \mapsto z = g(w) = x(u,v) + iy(u,v)$$

an. Bestimmen Sie dazu Real- bzw. Imaginärteil von g.

c) Skizzieren Sie einige Bildlinien der Parameterlinien $u = c$ bzw. $v = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ unter der Abbildung g.

– bitte wenden –

Aufgabe 4

Es bezeichne S die Einheitssphäre des $\mathbb{R}^3$ mit Nordpol N und $\sigma : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ die stereographische Projektion, die durch

$$\sigma(N) = \infty, \quad \sigma(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} \quad \text{für} \quad (\xi, \eta, \zeta) \in S \backslash \{N\}$$

von der Sphäre auf die erweiterte Zahlenebene gegeben ist.
Zeigen Sie, dass σ und σ^{-1} kreistreu sind, d.h. Kreise auf Kreise abbilden.

Hinweis: Beachten Sie, dass Geraden in $\widehat{\mathbb{C}}$ als (verallgemeinerte) Kreise aufgefasst werden.

Aufgabe 5

Rechnen Sie nach, dass die Bilder von verallgemeinerten Kreisen (d.h. von Kreisen oder Geraden) unter folgenden Abbildungen wiederum verallgemeinerte Kreise sind:

a) $w_1(z) = az \quad (a \in \mathbb{C}, a \neq 0)$,
b) $w_2(z) = z + b \quad (b \in \mathbb{C})$,
c) $w_3(z) = \frac{1}{z}$,
d) $w_4(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$.

HINWEIS

Übungsklausur: Die erste Übungsklausur zur Vorlesung „Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie" findet am Samstag, dem 9.12.2006, von 11.00 bis 13.00 Uhr statt.

Bitte beachten Sie folgende Hörsaaleinteilung:

Fachrichtung Elektroingenieurwesen	Gerthsen
Fachrichtung Geodäsie	Gerthsen
Fachrichtung Physik (Nachnamen mit Anfangsbuchstaben A bis K)	HMU
Fachrichtung Physik (Nachnamen mit Anfangsbuchstaben L bis Z)	HMO

Eine vorherige Anmeldung ist für diese Übungsklausur nicht erforderlich!