UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis

Prof. Dr. Roland Lemmert
Dipl.-Math. Marc Mitschele

08.12.2006

Höhere Mathematik III

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

7.Übungsblatt - WS 2006/2007

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie eine Möbiustransformation T, welche das Gebiet

$$H = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \, \mathrm{Im}\, z > 0\}$$

auf den ersten Quadranten abbildet.

b) Geben Sie eine konforme Abbildung f an, welche H auf das Innere des Einheitskreises abbildet.

c) Geben Sie eine von f verschiedene, schlichte Abbildung g an, welche H auf das Innere des Einheitskreises abbildet.

d) Warum leistet $h(z) = z^2$ nicht das Gewünschte?

Aufgabe 2

Berechnen Sie jeweils für die in den Teilaufgaben angegeben Funktionen und Wege das Wegintegral $\int\limits_\gamma f(z)dz$.

a) $f(z) = \overline{z}z^2, \quad \gamma :$ geradlinige Verbindung von -1 nach i.

b) $f(z) = \overline{z}z^2, \quad \gamma : \gamma(t) = e^{i(\pi - t)} \quad (t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right])$.

c) $f(z) = |z|^2, \quad \gamma :$ positiv orientierter Rand von $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) \in (0,1)\,, \mathrm{Im}\,(z) \in (0,1)\}$.

Aufgabe 3

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und γ ein im Gebiet G verlaufender, stückweise stetig differenzierbarer Weg. Zeigen Sie, dass in diesem Falle die Abschätzung

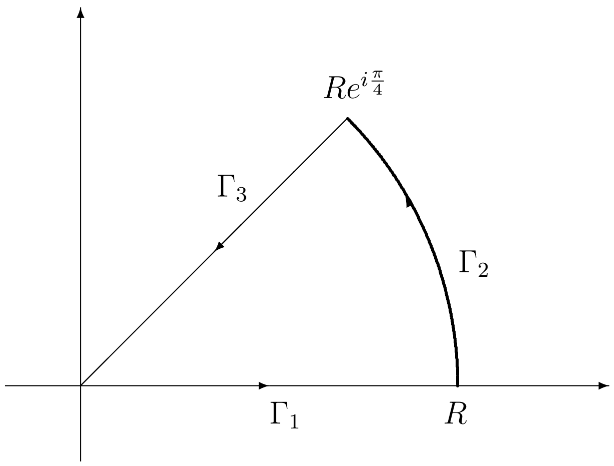
$$\left| \int\limits_\gamma f(z)dz \right| \leq \left(\max_{z \in \Gamma} |f(z)| \right) L(\gamma)$$

gilt, wobei $L(\gamma)$ die Länge und Γ das Bild des Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ bezeichnet.

– bitte wenden –

Aufgabe 4

Es seien die Funktion $f(z) = e^{iz^2}$ sowie der unten skizzierte Weg $\Gamma_R = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ gegeben. (Dabei ist Γ_2 der skizzierte Kreisbogen, wobei $R > 0$ vorausgesetzt wird.)



a) Zeigen Sie, dass $\int\limits_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$ für jedes $R > 0$ gilt.

b) Beweisen Sie:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz = 0.$$

c) Parametrisieren Sie Γ_1 bis Γ_3 und führen Sie in a) den Grenzübergang $R \to \infty$ durch. Berechnen Sie damit die Fresnelschen Integrale

$$\int\limits_0^\infty \sin(x^2)dx \quad \text{und} \quad \int\limits_0^\infty \cos(x^2)dx.$$

Hinweis: $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$.