

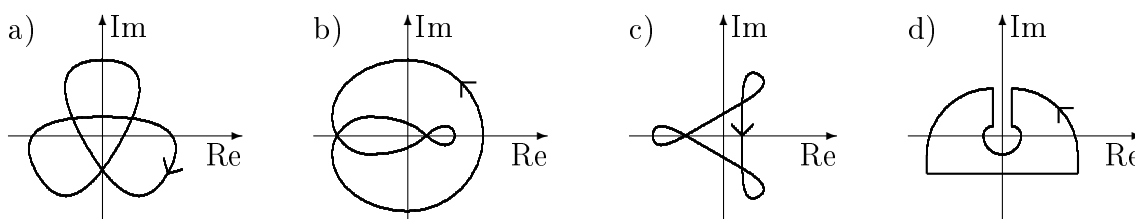
Höhere Mathematik III

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

8.Übungsblatt - WS 2006/2007

Aufgabe 1

Bestimmen Sie das Integral $\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta} d\zeta$ für die in a) bis d) skizzierten Kurven γ .



Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_{|z|=1} \frac{\cos(\pi z)}{z} dz,$

c) $\int_{|z|=3} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz,$

e) $\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz,$

b) $\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2 + 1} dz,$

d) $\int_{\gamma} \frac{(z+1)^2}{(z^2+1)(z-1)} dz,$

f) $\int_{|z-2|=3} \frac{e^{i \cos(z)} \sin(z^4 + 1) - z}{(z-7)^{42}} dz.$

Dabei sei γ der positiv orientierte Rand der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| < 2\}$.

Aufgabe 3

Es sei G ein Gebiet in \mathbb{C} , und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Eine in G holomorphe Funktion F heißt Stammfunktion von f , wenn $F' = f$ gilt.

Zeigen Sie: Ist γ ein glatter Weg in G mit Anfangspunkt a und Endpunkt b , und besitzt f eine Stammfunktion F , so gilt

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = F(b) - F(a).$$

Aufgabe 4

Für $R > 1$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ sei γ der positiv orientierte Rand des Sektors

$$S = \{re^{i\varphi} : 0 < r < R, 0 < \varphi < 2\pi/n\}.$$

Berechnen Sie zunächst für diesen Weg das Integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{1+z^n} dz,$$

und beweisen Sie dann mittels des Grenzübergangs $R \rightarrow \infty$ die Gleichung

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1).$$

ALLGEMEINE HINWEISE

Am Freitag, dem 22.12.2006, findet keine Übung statt.

Die erste Übung im neuen Jahr ist am Freitag, dem 12.01.2007.