UNIVERSITÄT KARLSRUHE 12.01.2007
Institut für Analysis

Prof. Dr. Roland Lemmert
Dipl.-Math. Marc Mitschele

Höhere Mathematik III

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

10.Übungsblatt - WS 2006/2007

Aufgabe 1

Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes.

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2+1}\,dz,$ b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{z(z+1)^2}\,dz,$

c) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz,$ d) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z}{e^{iz}-1}\,dz,$

e) $\displaystyle\int_{|z|=2} e^{\frac{z}{1-z}}\,dz,$ f) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{z}{\cosh z-1}\,dz,$

dabei sei γ der positiv orientierte Rand der Menge $G = \{x+iy \mid y^2 < (4\pi-1)(1-x^2)\}$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Wert des reellen Integrals

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{5-4\cos t}\,dt.$$

Aufgabe 3

Für $n \in \mathbb{N}$ sei Γ_n der Rand des Quadrates mit den Ecken $(n+\frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$.

a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{\Gamma_n} \frac{\pi}{z^2\sin(\pi z)}\,dz.$

b) Zeigen Sie: $\displaystyle\left|\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right| \le \pi \quad (z \in \Gamma_n, n \in \mathbb{N}).$

c) Beweisen Sie: $\displaystyle 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots = \frac{\pi^2}{12}.$

– bitte wenden –

Aufgabe 4

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und die Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sei bis auf eventuelle Polstellen holomorph in G. Weiter sei γ ein in G verlaufender, geschlossener, stückweise glatter Weg, der weder Pol- noch Nullstellen der Funktion f enthalte.
Mit N_γ werde die Anzahl der von γ umschlossenen Nullstellen von f bezeichnet, mit P_γ die der Pole (Vielfachheiten jeweils mitgezählt).
Zeigen Sie:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N_\gamma - P_\gamma.$$