Nachtrag zur 1. Übung

Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus werden wie folgt definiert:

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

Dabei ist jeweils $z \in \mathbb{C}$.

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \operatorname{Im}(\cos x + i \sin x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \operatorname{Re}(\cos x + i \cdot \sin x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Im allgemeinen sind die Formel $\sin z = \operatorname{Im}(e^{iz})$ und $\cos z = \operatorname{Re}(e^{iz})$ falsch!

Zum Beispiel gilt

$$\cos(i) = \frac{e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2}$$

$$\neq$$

$$\mathrm{Re}(e^{ii}) = e^{-1}$$

sowie

$$\sin(i) = \frac{e^{i\cdot i} - e^{-i\cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e}{2i}$$

$$\neq$$

$$\mathrm{Im}(e^{ii}) = \mathrm{Im}(e^{-1}) .$$

Ergänzung zur 2. Übung

Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

Weiter sei $U_r(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r \}$.

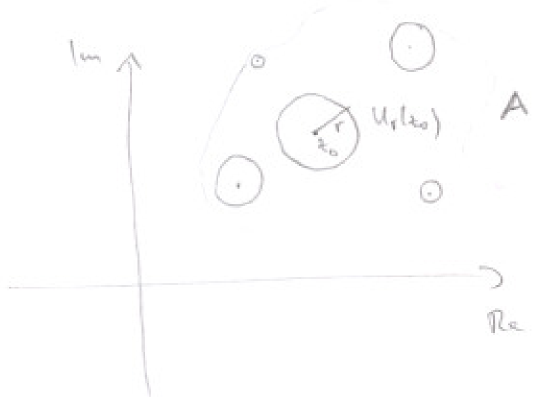
$U_r(z_0)$ heißt offene Kreisscheibe um z_0 mit Radius r.

Definition: Es sei $A \subseteq \mathbb{C}$. A heißt offen, wenn zu jedem $z \in A$ eine offene Kreisscheibe um z mit Radius $r = r(z)$ (i.A. abhängig von z) existiert, so dass $U_r(z) \subseteq A$.

In Formeln:

$$A \text{ offen} \iff \forall z \in A \; \exists r = r(z) > 0 : U_r(z) \subseteq A.$$

Skizze:



Definition: $B \subseteq \mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, wenn es eine offene Menge $A \subseteq \mathbb{C}$ gibt, so dass $B = \mathbb{C} \setminus A$ gilt.

Äquivalent dazu ist: Für jede Folge (z_n) in B, die gegen ein $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, folgt, dass z in B liegt.

In Formeln:

$$B \text{ abgeschlossen} \iff \exists A \subseteq \mathbb{C},\ A \text{ offen};\ B = \mathbb{C} \setminus A.$$

$$\iff \forall (z_n) \subseteq B \text{ mit } z_n \to z \in \mathbb{C}:\ z \in B.$$