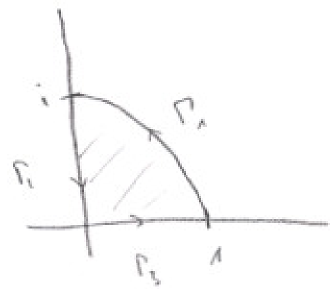
Anmerkungen zum Parametrisieren



Es sei

$$G := \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 , \operatorname{Im} z > 0 , |z| < 1 \}.$$

Dann ist der Rand von G gegeben durch

$$\partial G = \underbrace{\Gamma_1}_{\subseteq \mathbb{C}} \cup \underbrace{\Gamma_2}_{\subseteq \mathbb{C}} \cup \underbrace{\Gamma_3}_{\subseteq \mathbb{C}} .$$

Die Bogenstücke Γ_1, Γ_2 und Γ_3 lassen sich parametrisieren

$$\gamma_1(t) = e^{it} \qquad (t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]),$$

$$\gamma_2(t) = (1 - t + \tfrac{\pi}{2})\, i \qquad (t \in [\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} + 1]),$$

$$\gamma_3(t) = t - (\tfrac{\pi}{2} + 1) \qquad (t \in [\tfrac{\pi}{2} + 1, \tfrac{\pi}{2} + 2]).$$

Es gilt $\Gamma_1 = \gamma_1([0, \frac{\pi}{2}])$, $\Gamma_2 = \gamma_2([\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1])$,

$\Gamma_3 = \gamma_3([\frac{\pi}{2} + 1, \frac{\pi}{2} + 2])$.

Der so entstehende Weg $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3$,

mit $\gamma_1(\frac{\pi}{2}) = \gamma_2(\frac{\pi}{2})$; $\gamma_2(\frac{\pi}{2} + 1) = \gamma_3(\frac{\pi}{2} + 1)$, ist stückweise glatt, d.h. insbesondere stetig, und definiert auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2} + 2]$, also

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) , & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \gamma_2(t) , & t \ [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1] \\ \gamma_3(t) , & t \in [\frac{\pi}{2} + 1, \frac{\pi}{2} + 2] \end{cases} .$$

Wird man den Rand $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ mittels einer (schlichten) Abbildung abgebildet, so genügt es im allgemeinen, eine stückweise Parametrisierung des Randes zu kennen, um Aussagen über die Bildkurve treffen zu können.

Z.B. ist im vorliegenden Fall

$$\tilde{\gamma}_1(t) = e^{it} \quad (t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]),$$
$$\tilde{\gamma}_2(t) = (1-t) \quad (t \in [0,1]),$$
$$\tilde{\gamma}_3(t) = t \quad (t \in [0,1])$$

eine einfache (stückweise) Parametrisierung.

Wiederum gilt $\Gamma_1 = \tilde{\gamma}_1([0,\tfrac{\pi}{2}])$, $\Gamma_2 = \tilde{\gamma}_2([0,1])$,
$\Gamma_3 = \tilde{\gamma}_3([0,1])$,

sowie $\tilde{\gamma}_1(\tfrac{\pi}{2}) = \tilde{\gamma}_2(0)$, $\tilde{\gamma}_2(1) = \tilde{\gamma}_3(0)$.

Allerdings lassen sich die Wege $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$ in der angegebenen Form nicht zu einem stückweise glatten Weg zusammensetzen. Dazu benötigt man dann Parametertransformationen, wodurch man dann z.B. den angegebenen Weg γ erhalten kann.

Details siehe Fachliteratur, z.B. Freitag/Busam „Funktionentheorie I“