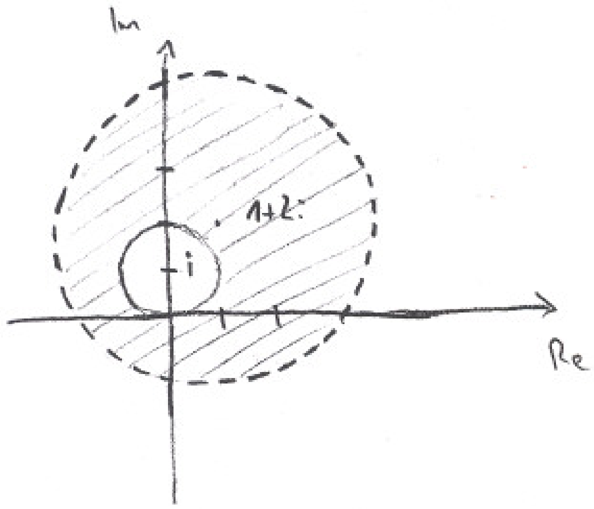
Höhere Mathematik III

Lösungen zum 1. Übungsblatt

①

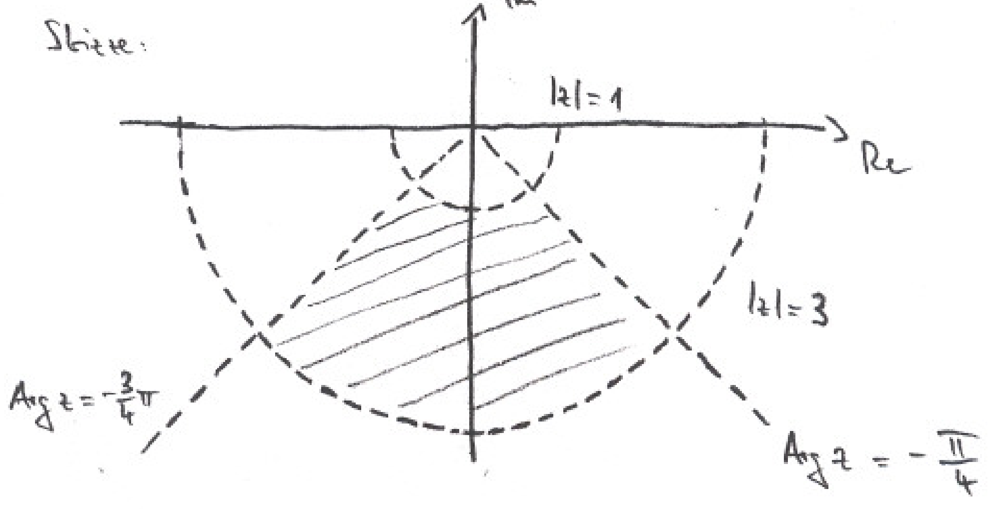
a) $\{ z \in \mathbb{C} : |z - i| \geq 1 , |z - 1 - 2i| < 3 \}$

$$= \underbrace{\{ z \in \mathbb{C} : |z-i| \geq 1 \}}_{\text{Äußeres und Rand des Kreises um } i \text{ mit Radius } 1} \cap \underbrace{\{ z \in \mathbb{C} : |z - (1+2i)| < 3 \}}_{\text{Inneres des Kreises um } 1+2i \text{ mit Radius } 3}$$



<u>Skizze</u>

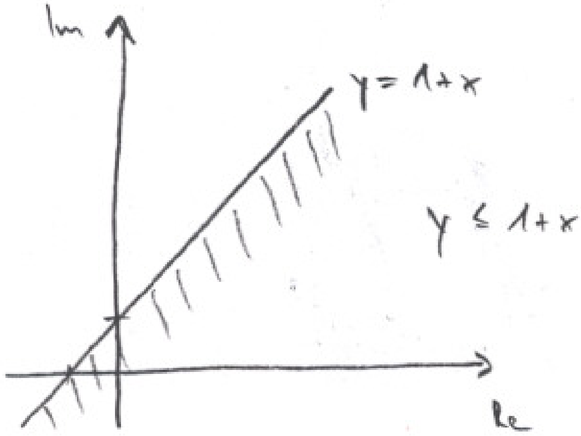
b) Skizze:



c) Menge aller z mit gleichem Abstand zu $-1-i$ wie zu $2+i$:
Mittelsenkrechte auf der Verbindungsstrecke.

d) $\mathrm{Im}((1-i)z) = \mathrm{Im}((1-i)(x+iy))$

$= \mathrm{Im}(x+y+i(y-x)) = y-x \overset{!}{\leq} 1$.

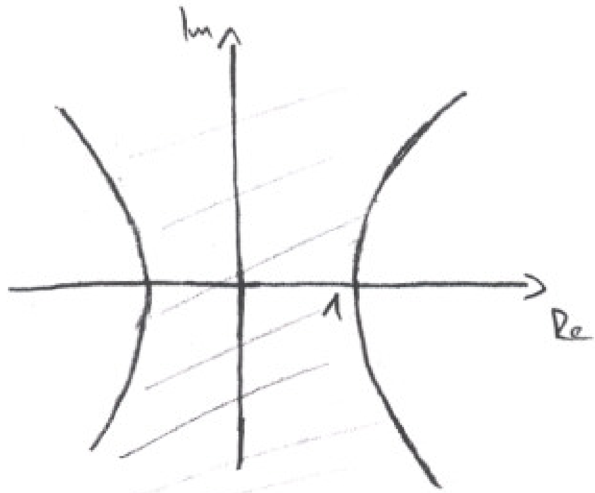


Halbebene

e) $\mathrm{Re}(z^2) \overset{z=x+iy}{=} \mathrm{Re}(x^2 + 2ixy - y^2) = x^2 - y^2$

$x^2 - y^2 \leq 1 \iff |x| \leq \sqrt{1+y^2} \iff$

$-\sqrt{1+y^2} \leq x \leq \sqrt{1+y^2}$



(2) a) Es gilt

$$|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = (-\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4 .$$

Folglich ist $|z| = 2$. Nun suchen wir ein Argument von z, also ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit

$$-\sqrt{3} + i = z = 2(\cos\varphi + i\sin\varphi) .$$

Es muss also

$$\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}$$

gelten.
Dies ist für $\varphi = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, mit $k \in \mathbb{Z}$, erfüllt, und somit gilt $\operatorname{Arg} z = \frac{5}{6}\pi$.

b) Mit Hilfe der Umformung

$$\frac{4+2i}{5-i} = \frac{(4+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{20+4i+10i+2i^2}{5^2-i^2}$$

$$= \frac{18+14i}{26} = \frac{9}{13} + \frac{7}{13}i$$

erhält man

$$\operatorname{Re}\left(\frac{4+2i}{5-i}\right) = \frac{9}{13}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{4+2i}{5-i}\right) = \frac{7}{13} .$$

Weiter ist wegen $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-i\right) = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-i\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-i\right)}}{2}$$

$$= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}e^{1} + e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{-1}}{2} = i\left(\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\right)$$

$$= i \sinh(1) .$$

Folglich ist $\operatorname{Re}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-i\right)\right) = 0$, $\operatorname{Im}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-i\right)\right) = \sinh(1)$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ besteht die Abschätzung

$$|\sin(in)| = \left|\frac{e^{i(in)} - e^{-i(in)}}{2i}\right| = \left|\frac{e^{-n} - e^{n}}{2}\right|$$

$$= \frac{e^{n}-e^{-n}}{2} \geq \frac{e^{n}-1}{2} .$$

Damit ergibt sich: $|\sin(in)| > 10^5$ gilt sicher dann, wenn

$$\frac{e^{n}-1}{2} > 10^5 \text{, also } e^{n} > 2\cdot 10^5 + 1 .$$

Dies ist wiederum genau erfüllt, wenn sogar $e^n > 10^6$, also $n > \ln 10^6$, gilt.

Wegen $e > 2$ ist $e^4 > 2^4 > 10$ und damit $\ln 10 < 4$.

Die Ungleichung $n > 6$ ist also mit Sicherheit für $n > 6 \cdot 4 = 24$ erfüllt. Wir können also $n = 25$ wählen.

(3) a) Mit Hilfe des Ansatzes $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ und $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ erhalten wir

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 = \frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} - \frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4i^2}$$

$$= \frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} + \frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4}$$

$$= \frac{z^2 + \bar{z}^2}{2}.$$

b) Hier erhält man direkt

$$x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = z \cdot \bar{z}.$$

c) Auch hier sieht man

$$x^2 - y^2 - 2ixy = x^2 - 2ixy - y^2 = (x-iy)^2 = \bar{z}^2$$

(4) In den folgenden Teilaufgaben bezeichnen wir mit D_f stets den Definitionsbereich der gegebenen Funktion f.

a) Es ist $f(x+iy) = \dfrac{1}{x^2-y^2+2ixy} \overset{z=x+iy}{=} \dfrac{1}{z^2}$,

und folglich ist $D_f = \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Nach der Quotientenregel ist f holomorph auf der offenen Menge $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Es gilt $f'(z) = -2z^{-3}$.

b) Offensichtlich ist $D_f = \mathbb{C}$.

Weiter gilt

$$f(x+iy) = f(z) = \operatorname{Re} z + i\bar{z}^2 = x + i(x-iy)^2$$

$$= x + i(x^2 - 2ixy - y^2)$$

$$= \underbrace{x + 2xy}_{=:u(x,y)} + i\underbrace{(x^2-y^2)}_{=:v(x,y)}$$

Nun ist

$$u_x(x,y) = 1+2y \quad , \quad u_y(x,y) = 2x$$

$$v_x(x,y) = 2x \quad , \quad v_y(x,y) = -2y \, .$$

Die Funktionen $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ sind also reell differenzierbar.

Damit f komplex differenzierbar ist, müssen noch die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (CRD) erfüllt sein, d.h. es muss

$u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ gelten.

Die Bedingung $u_y = -v_x$ ergibt $2x = -2x$, und dies ist nur für $x = 0$ der Fall.
Aus der Bedingung $u_x = v_y$ erhalten wir $1 + 2y = -2y$, also $y = -\frac{1}{4}$.

Somit ist die Funktion nur im Punkt $-\frac{1}{4}i$ komplex differenzierbar, aber nirgends holomorph, da f auf keiner offenen Menge um $-\frac{1}{4}i$ komplex differenzierbar ist.

Weiter ist
$$f'(-\tfrac{1}{4}i) = u_x(0, -\tfrac{1}{4}) + i\, v_x(0, -\tfrac{1}{4})$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2} + i \cdot 0 = \tfrac{1}{2}$$

c) Wir bestimmen zunächst D_f für $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2(z)}$.

Es gilt: $\sin^2(z) = 0 \iff \sin(z) = 0$

$$\iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz}$$

$$\iff e^{2iz} = 1 \overset{z = x+iy}{\iff} e^{-y} \cdot e^{2ix} = 1$$

$$\iff y = 0,\ e^{2ix} = 1$$

$$\iff y = 0,\ \cos(2x) + i \sin(2x) = 1$$

$\Leftrightarrow \quad y = 0 \quad , \quad \cos(2x) = 1 \quad , \quad \sin(2x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad y = 0 \quad , \quad \cos(2x) = 1 \quad , \quad x = k\frac{\pi}{2} \quad$ mit $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \quad y = 0 \quad , \quad x = k\pi \quad$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Folglich ist $D_f = \mathbb{C} \setminus \{ k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$.

(Die Funktion $z \mapsto \sin z$ hat also nur reelle Nullstellen.)

Nach der Quotientenregel ist f auf der offenen Menge D_f holomorph, und es gilt $f'(z) = \dfrac{-2\cos(z)}{(\sin z)^3}$.

d) Wie man sieht, ist $D_f = \mathbb{C} \setminus i\cdot\mathbb{R}$.

D_f ist offen, und f besitzt die Darstellung

$$f(x+iy) = \underbrace{\ln(x^2+y^2)}_{=:u(x,y)} + i\,\underbrace{2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}_{=:v(x,y)} .$$

Um f auf komplexe Differenzierbarkeit bzw. Holomorphie zu untersuchen, überprüfen wir, ob die CRD erfüllt sind:

$$u_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad , \quad u_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$v_x(x,y) = 2\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-2y}{x^2+y^2}$$

$$v_y(x,y) = 2\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{2x}{x^2+y^2}.$$

Folglich erfüllt f die CRD auf D_f, und ist dort somit holomorph.

Für $z\in D_f$ gilt somit

$$f'(z) = f'(x+iy) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$$

$$= \frac{2x}{x^2+y^2} - i\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$= 2\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{2}{z}.$$

(5)

Es sei $D\subseteq\mathbb{C}$ offen, $f: D\to\mathbb{C}$ holomorph, $D^* = \{z\in\mathbb{C}: \overline{z}\in D\}$. Weiter sei $g: D^*\to\mathbb{C}$ definiert durch $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ $(z\in D^*)$.

Nun sei $z_0\in D^*$. Dann ist $\overline{z_0}\in D$ und es gilt

$$\overline{f'(\overline{z_0})} = \overline{\lim_{\overline{z}\to\overline{z_0}}\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}{\overline{z}-\overline{z_0}}} = \lim_{\overline{z}\to\overline{z_0}}\overline{\left(\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}{\overline{z}-\overline{z_0}}\right)}$$

$$= \lim_{\overline{z} \to \overline{z}_0} \frac{\overline{f(\overline{z})} - \overline{f(\overline{z}_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = g'(z_0).$$

Da $z_0 \in D^*$ beliebig war, ist g in D^* holomorph, und es gilt

$$g'(z) = \overline{f'(\overline{z})} \quad \text{für alle } z \in D^*.$$

⑥ a) Es ist $$|f'(z)|^2 \underset{\text{CRD}}{=} |u_x(x,y) + i\, v_x(x,y)|^2$$

$$= (u_x(x,y))^2 + (v_x(x,y))^2.$$

Weiter gilt

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x} v(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) \end{pmatrix} \underset{\text{CRD}}{=} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) & -\frac{\partial}{\partial x} v(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x} v(x,y) & \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} u(x,y)}_{= u_x(x,y)}\Big)^2 + \Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} v(x,y)}_{= v_x(x,y)}\Big)^2$$

Es sei z_0 aus dem Definitionsbereich von f.

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ hat als komplex differenzierbare Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ im Punkt z_0 eine invertierbare Funktionalmatrix

$D := \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$, da nach a) $\det D = u_x^2 + v_x^2 = |f'|^2 \underset{\text{Vor.}}{\neq} 0$

gilt.

Mit Hilfe des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit erhält man, dass es offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$ mit $z_0 \in U$ und $f(z_0) \in V$ gibt, so dass f die Menge U bijektiv auf V abbildet und die (lokale) Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ stetig ist.

Bleibt also zu zeigen, dass $f^{-1} : V \to U$ holomorph ist.

Es sei dazu $z_1 \in U$ und (η_n) eine Folge in V mit den Eigenschaften $\eta_n \neq f(z_1)$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = f(z_1)$.

Setzt man $\zeta_n := f^{-1}(\eta_n)$, so gilt aufgrund der Stetigkeit von f^{-1} $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = z_1$. Außerdem ist $\zeta_n \neq z_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da $f^{-1} : V \to U$ bijektiv ist.

Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(\eta_n) - f^{-1}(f(z_1))}{\eta_n - f(z_1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\zeta_n - z_1}{f(\zeta_n) - f(z_1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(\zeta_n) - f(z_1)}{\zeta_n - z_1}} = \frac{1}{f'(z_1)} .$$

Daraus folgt $(f^{-1})'(f(z_1)) = \dfrac{1}{f'(z_1)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(f(z_1)))}$,

und damit die Behauptung.

c) Betrachtet man die Funktion $f(z) = e^z \quad (z \in \mathbb{C})$, so sieht man, dass $|f'(z)| = |e^z| = |e^{x+iy}| = e^x \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Folglich verschwindet die Ableitung von f nirgends.

f besitzt allerdings keine (globale) Umkehrfunktion, da

$f(z) = f(z + 2k\pi i)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

(Nach b) existiert zumindest lokal eine holomorphe Umkehrfunktion.)