Höhere Mathematik III

Lösungen zum 2. Übungsblatt

(1) Es seien $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{C}$ mit $|\beta|^2 > \alpha\gamma$.

Setzt man $z = x + iy$ sowie $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ in die Gleichung $(*)$ ein, so erhält man

$$\alpha(x+iy)(x-iy) + (\beta_1 + i\beta_2)(x+iy) + (\beta_1 - i\beta_2)(x-iy) + \gamma = 0.$$

Zusammengefasst ergibt sich die Gleichung

$$\alpha(x^2+y^2) + 2\beta_1 x - 2\beta_2 y + \gamma = 0.$$

Es sind nun die Fälle $\alpha = 0$ und $\alpha \neq 0$ zu unterscheiden.

Ist $\alpha = 0$, so beschreibt die Gleichung

$$2\beta_1 x - 2\beta_2 y + \gamma = 0$$

eine Gerade, denn wegen $|\beta|^2 > \alpha\gamma = 0$ ist $\beta \neq 0$, d.h. β_1 oder β_2 ist ungleich 0.

Umgekehrt kann man jede beliebige Geradengleichung durch geeignete Wahl von β und γ erhalten, und hat dabei wiederum $|\beta|^2 > 0$.

Ist $\alpha \neq 0$, so liefert Division durch α die Gleichung

$$x^2 + y^2 + \frac{2\beta_1}{\alpha} x - \frac{2\beta_2}{\alpha} y + \frac{\gamma}{\alpha} = 0,$$

und mittels quadratischer Ergänzung

$$\left(x + \frac{\beta_1}{\alpha}\right)^2 - \frac{\beta_1^2}{\alpha^2} + \left(y - \frac{\beta_2}{\alpha}\right)^2 - \frac{\beta_2^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0,$$

also

$$\left(x + \frac{\beta_1}{\alpha}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta_2}{\alpha}\right)^2 = \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 - \alpha\gamma}{\alpha^2}.$$

Wegen $\beta_1^2 + \beta_2^2 - \alpha\gamma = |\beta|^2 - \alpha\gamma > 0$ ist die rechte Seite positiv, und die Gleichung stellt also einen Kreis um den Punkt

$-\frac{\beta_1}{\alpha} + i\frac{\beta_2}{\alpha} = -\frac{\overline{\beta}}{\alpha}$ mit Radius $\frac{(|\beta|^2 - \alpha\gamma)^{\frac{1}{2}}}{|\alpha|}$ dar.

Umgekehrt kann man jede Kreisgleichung erhalten, indem man $\alpha = 1$ wählt, dann β so wählt, dass der Mittelpunkt stimmt, und schließlich noch durch geeignete Wahl von γ für den richtigen Radius sorgt.

b) Hier ist $\alpha = 3 \neq 0$, $\beta = 1+i$ und $\gamma = -1$.
(Beachte $|\beta|^2 = 2 > -3 = \alpha \cdot \gamma$). Folglich handelt es sich um einen Kreis um $-\frac{\overline{\beta}}{\alpha} = \frac{i-1}{3}$ mit Radius $\frac{(2 - 3(-1))^{\frac{1}{2}}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

c)

Der Kreis um $2+3i$ mit Radius 5 wird durch die Gleichung $|z-(2+3i)| = 5$ dargestellt.

Durch Quadrieren ergibt sich

$$|z-(2+3i)|^2 = 25 \quad , \text{ also}$$

$$(z-2-3i)(\bar{z}-2+3i) = 25 .$$

Ausmultiplizieren liefert

$$z\bar{z} + (-2+3i)z + (-2-3i)\bar{z} + 4 + 9 = 25 ,$$

also $z\bar{z} + (-2+3i)z + \overline{(-2+3i)}\,\bar{z} - 12 = 0$.

Die Gerade durch -1 und $2i$ hat die Gleichung $y = 2x+2$, also $2x - y + 2 = 0$.

Aus Teil a) wissen wir: Diese Geradengleichung ergibt sich für $\alpha = 0$, $\beta = 1 - \frac{i}{2}$ und $\gamma = 2$.

Es sei $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, und $z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}$ die zugehörige Polarkoordinatendarstellung.

Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{|z|\, e^{i\operatorname{Arg}(z)}}{|z|\, e^{-i\operatorname{Arg}(z)}} - \frac{|z|\, e^{-i\operatorname{Arg}(z)}}{|z|\, e^{i\operatorname{Arg}(z)}} \right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{i2\operatorname{Arg} z} - e^{-i2\operatorname{Arg}(z)} \right)$$

$$= \sin(2 \underbrace{\operatorname{Arg} z}_{\in(-\pi,\pi)}) . \qquad (*)$$

Folglich ist $f(\mathbb{C}\setminus\{0\}) = [-1,1]$.

Offensichtlich ist f auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ stetig (als Komposition dort stetiger Abbildungen).

Allerdings ist f in 0 nicht stetig fortsetzbar, da für die Folgen $\left(\frac{1}{n}\right)$ und $\left(\frac{e^{i\pi/4}}{n}\right)$ zwar

$$\left|\frac{1}{n}\right| \to 0 \quad \text{und} \quad \left|\frac{e^{i\pi/4}}{n}\right| \to 0,$$

aber nach $(*)$ auch $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin(2\cdot 0) = 0$ sowie

$$f\left(\frac{e^{i\pi/4}}{n}\right) = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

gilt.

(3) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

Ist f konstant, so gilt für jedes $z_0 \in G$ definitionsgemäß

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{c - c}{z - z_0} = 0.$$

Nun gelte also $f'(z) = 0$ für alle $z \in G$.

Wir schreiben f in der Form $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

mit $u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(x+iy)$, $v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(x+iy)$.

Da f holomorph ist, sind u, v reell differenzierbar und die partiellen Ableitungen u_x, u_y, v_x, v_y stetig.

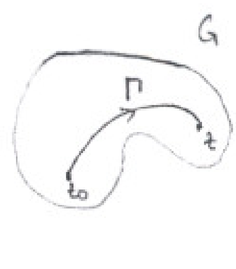
Weiter folgt aus der Holomorphie der Funktion f die Darstellung

$$f'(x+iy) = u_x(x,y) + i\, v_x(x,y) \underset{\text{CRD}}{=} v_y(x,y) - i\, u_y(x,y)$$

Nach Voraussetzung ist $f'(x+iy) = 0$ für alle $x+iy \in G$.

Also gilt $u_x = v_y = 0$ und $v_x = -u_y = 0$ in G.

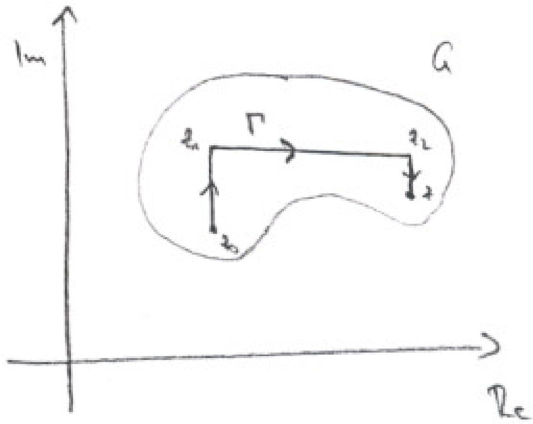
Wir zeigen nun, dass daraus die Konstanz von u und v, also auch die von f, folgt.



Es sei $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$

Weiter sei $z \in G$. Da G zusammenhängend ist, lassen sich z_0 und z durch einen in G verlaufenden Weg γ

verbinden. Der Weg γ kann sogar so gewählt werden, dass es stückweise achsenparallel verläuft.



(Das ist für jedes Gebiet und je zwei Punkte aus dem Gebiet möglich.)

Es bezeichne $z_0, z_1, \ldots, z_n = z$ die Ecken des stückweise achsenparallelen Weges. Dann genügt es zu zeigen, dass $u(x_0, y_0) = u(x_1, y_1), \ldots, u(x_{n-1}, y_{n-1}) = u(x_n, y_n)$ gilt, wobei $z_j = x_j + i y_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ ist.

Denn dann ist $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ für alle $x + iy \in G$.

Um dies zu zeigen, verwenden wir den mehrdimensionalen Mittelwertsatz. Nach Voraussetzung ist u stetig differenzierbar, also gilt

$$u(x_{j+1}, y_{j+1}) - u(x_j, y_j) = \underbrace{(\nabla u)}_{=0}(\xi_j, \eta_j) \cdot \begin{pmatrix} x_{j+1} - x_j \\ y_{j+1} - y_j \end{pmatrix} = 0$$

für alle $j = 0, \ldots, n-1$, wobei (ξ_j, η_j) aus der Verbindungsstrecke von (x_j, y_j) und (x_{j+1}, y_{j+1}) stammt.

Somit ist u konstant, und die gleiche Rechnung zeigt, dass v und damit f konstant ist.

7) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.

a) Betrachtet man die Darstellung $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f = u + iv$,

so ist nach Voraussetzung u konstant.

Für die Ableitung von f gilt $f' = u_x + i v_x \underset{\text{CRD}}{=} \underbrace{u_x}_{=0} - i \underbrace{u_y}_{=0} = 0$.

Nach Aufgabe 3 ist also f konstant.

b) Wie in a) sieht man $f' = \underbrace{v_y}_{=0} + i \underbrace{v_x}_{=0} = 0$, da

v als konstant vorausgesetzt wird. Also ist wieder f konstant.

c) Ist $|f(z)| = 0$ für alle $z \in G$, so folgt $f(z) = 0$ für alle $z \in G$, d.h. f ist konstant.

Es sei also $|f(z)| > 0$ für alle $z \in G$.

Dann gilt $f \cdot \overline{f} = |f|^2$ und damit ergibt sich

$$0 = (f \cdot \overline{f})_{\overline{z}} = f_{\overline{z}} \cdot \overline{f} + f \cdot \overline{f}_{\overline{z}} = f \cdot \overline{f}_{\overline{z}},$$

wobei die letzte Gleichheit wegen $f_{\overline{z}} = 0$ gilt (dies folgt aus der Holomorphie von f).

Wegen $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ erhalten wir $\overline{f}_{\overline{z}} = 0$.

Aufgrund von $\overline{f}_{\overline{z}} = \overline{f_z}$ ist also $\overline{f_z} = 0$, d.h.

$f' = f_z = 0$ in G.

Nach Aufgabe 3 ist f also konstant.

d) Es sei $\operatorname{Arg} f(z) = \varphi$ für alle $z \in G$.

Für $g(z) := f(z)\, e^{-i\varphi}$ gilt dann $\operatorname{Arg} g(z) = \varphi - \varphi = 0$ für alle $z \in G$, d.h. $\operatorname{Im} g = 0$.

Nach b) ist also die Funktion g konstant und damit auch f.

5

Mit $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u_\lambda(x,y) = x^2 - \lambda y^2 - y .$$

Damit u_λ Realteil einer holomorphen Funktion sein kann, muss u_λ harmonisch sein, d.h. $\Delta u_\lambda = 0$ gelten.

Dies ist wegen

$$(\Delta u_\lambda)(x,y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u\right)(x,y) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u\right)(x,y)$$

$$= 2 - 2\lambda ,$$

nur für $\lambda = 1$ erfüllt.

Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, existiert nach einem Satz der Vorlesung eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, so dass u_1 Realteil von f ist.

Zur Bestimmung von f:

Da f holomorph ist, gelten die CR Dglen. Wir erhalten also aus der Darstellung $f = u_1 + iv$ die Bedingungen: (1) $(u_1)_x = v_y$ und

(2) $(u_1)_y = -v_x$

Mit $u_1(x,y) = x^2 - y^2 - y$ folgt also aus (1)

$$(u_1)_x = 2x = v_y \,,$$ also

$$v(x,y) = 2xy + \varphi(x) \,,$$ wobei φ eine Integrations-konstante ist, die von x abhängen kann.

Aus (2) folgt

$$-v_x = -2y - \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x) = -2y - 1 = (u_1)_y \,,$$

also $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x) = 1$, also $\varphi(x) = x + c$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Für die gesuchte Funktion f gilt also

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= x^2 - y^2 - y + i(2xy + x + c) \\ &= x^2 - y^2 + 2ixy + i(x+iy) + ic \\ &\underset{z = x+iy}{=} z^2 + iz + ic \\ &= f(z). \end{aligned}$$